Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Beran
WS 2007/08
16. Oktober 2007

# 0. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

**Aufgabe 1** Für eine Zufallsvariable $X$ ist die charakteristische Funktion $\varphi_X$ definiert durch

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Es gilt dann für zwei Zufallsvariablen $X, Y$: $\varphi_X = \varphi_Y \Leftrightarrow X \stackrel{d}{=} Y$. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Dann gilt

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t).$$

(b) Für eine Zufallsvariable $X$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at).$$

(c) Es gilt

$$\varphi_X \text{ reellwertig } \Longleftrightarrow X \stackrel{d}{=} -X.$$

**Aufgabe 2**

(a) Berechnen Sie die charakteristische Funktion von $Y_1 - Y_2$ wobei $Y_1, Y_2$ unabhängig Standard-Exponential-verteilt sind.

(b) Man zeige mit Hilfe von (a): Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, so hat $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ ebenfalls die Dichte $f$.

(c) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda$. Welche Verteilung besitzt $\sum_{k=1}^n X_k$?

**Aufgabe 3** Der *Zentrale Grenzwertsatz (ZGS)* für i.i.d. Zufallsvariablen lautet: Seien $X_k$ i.i.d. mit $E(X_k) = \mu$ und $Var(X_k) = \sigma^2 < \infty$. Dann gilt

$$\frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \stackrel{d}{\to} Z$$

wobei $Z$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist und $\stackrel{d}{\to}$ für Konvergenz in Verteilung steht.
Benutzen Sie den ZGS, um folgende Aufgaben zu bearbeiten.

(a) Wie groß ist (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, bei 10000 Würfen eines Würfels höchstens 3400 mal eine 2 oder 5 zu erhalten?

(b) Bei einer Werbeaktion eines Versandhauses sollen die ersten 1000 Einsender einer Bestellung eine Damen- bzw. Herrenarmbanduhr als Geschenk erhalten. Es werde angenommen, dass sich beide Geschlechter gleichermaßen von dem Angebot angesprochen fühlen. Wie viele Damen- und wie viele Herrenarmbanduhren sollte das Versandhaus vorrätig haben, so dass mit Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% alle 1000 Einsender eine passende Uhr erhalten?

(c) Es seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $E(X_k) = 0$,$Var(X_k) = 1$ und $E(X_k^4) < \infty$. Bestimmen Sie die Grenzverteilung von

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{X_1X_2 + X_3X_4 + \cdots + X_{2n-1}X_{2n}}{X_1^2 + X_2^2 \cdots + X_{2n}^2}.$$