Universität Konstanz WS 2007/08
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Beran
31. Oktober 2007

1. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

Aufgabe 1 Welche der folgenden Parametrisierungen sind identifizierbar?

(a) $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \nu, \sigma^2)$ und P_θ ist die Verteilung von $X = (X_1, \ldots, X_p)$, wobei die X_i unabhängig sind mit $X_i \sim \mathcal{N}(\alpha_i + \nu, \sigma^2)$.

(b) Die gleiche Parametrisierung wie in (a), wobei zusätzlich $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ in $\{(a_1, \ldots, a_p) : \sum_{i=1}^p a_i = 0\}$ enthalten sein soll.

(c) $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ unabhängig und $\theta = (\mu_1, \mu_2)$, wobei $X - Y$ beobachtet wird.

Aufgabe 2 Es seien $X_1, \ldots, X_m$ unabhängig identisch verteilt mit Verteilungsfunktion F und $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig identisch verteilt mit Verteilungsfunktion G, wobei das Modell $\{(F, G)\}$ beschrieben ist durch

$$\psi(X_1) = Z_1, \quad \psi(Y_1) = Z_1' + \Delta,$$

wobei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unbekannte streng monoton steigende, differenzierbare Funktion ist, $\psi' > 0$, $\psi(\pm\infty) = \pm\infty$ und Z_1, Z_1' unabhängige Zufallsvariablen sind. Außerdem gelte $\Delta \in \mathbb{R}$.

(a) Sei $Z_1, Z_1' \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Zeigen Sie, dass ψ und Δ identifizierbar sind.

(b) Sei nun $Z_1, Z_1' \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit unbekanntem σ^2. Sind ψ und Δ immernoch identifizierbar? Wenn nicht, welche Parameter dann?

Aufgabe 3 Es seien θ_1, θ_2 die möglichen Zustände der Natur, a_1, a_2, a_3 die möglichen Aktionen und die Verlustfunktion $l(\theta, a)$ sei gegeben durch

$\theta \backslash a$	a_1	a_2	a_3
θ_1	0	1	2
θ_2	2	0	1

Sei X eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, \theta)$ gegeben durch

$\theta \backslash x$	0	1
θ_1	p	$(1-p)$
θ_2	q	$(1-q)$

und $\delta_1, \ldots, \delta_9$ seien die folgenden Entscheidungsregeln

$x \backslash \delta_i$	$i = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$x = 0$	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3
$x = 1$	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3

(a) Berechnen und zeichnen Sie die Risikopunkte für $p = q = 0.1$.

(b) Berechnen und zeichnen Sie die Risikopunkte für $p = 1 - q = 0.1$.

(c) Bestimmen Sie unter $\delta_1, \ldots, \delta_9$ die Minimaxregel im Fall (a).

(d) Nehmen Sie an, dass θ eine A-Priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(\theta_1) = \pi(\theta_2) = 0.5$ besitzt und bestimmen Sie die Bayesregel im Fall (a).

Aufgabe 4 Ein Entscheidungsproblem für einen Parameter $\theta \in \mathbb{R}$ lässt sich oft auf die Alternativen $\theta < 0$, $\theta = 0$, $\theta > 0$ reduzieren. Die entsprechende Aktion a sei mit $-1, 0, 1$ bezeichnet und die Verlustfunktion sei gegeben durch

$\theta \backslash a$	-1	0	1
< 0	0	c	$b+c$
$= 0$	b	0	b
> 0	$b+c$	c	0

wobei b und c positiv sind. Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit unabhängigen $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$. Die Entscheidungsregel sei gegeben durch

$$\delta_{r,s}(X) = \begin{cases} -1 & \text{falls} \quad \bar{X} < r \\ 0 & \text{falls} \quad r \leq \bar{X} \leq s \\ 1 & \text{falls} \quad \bar{X} > s \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Risikofunktion gegeben ist durch

$$R(\theta, \delta_{r,s}) = \begin{cases} c\bar{\Phi}(\sqrt{n}(r-\theta)) + b\bar{\Phi}(\sqrt{n}(s-\theta)) & \text{falls} \quad \theta < 0 \\ b\bar{\Phi}(\sqrt{n}s) + b\bar{\Phi}(\sqrt{n}r) & \text{falls} \quad \theta = 0 \\ c\bar{\Phi}(\sqrt{n}(s-\theta)) + b\bar{\Phi}(\sqrt{n}(r-\theta)) & \text{falls} \quad \theta > 0 \end{cases}$$

wobei $\bar{\Phi} = 1 - \Phi$ und Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

(b) Zeichnen die die Risikofuntion für $b = c = 1, n = 1$ und

(i) $r = -s = -1$

(ii) $r = -\frac{1}{2}s = -1$.

Für welche Werte von θ ist das Risiko im Fall (i) kleiner als im Fall (ii).