Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Beran
13. November 2007

WS 2007/08

3. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

Aufgabe 1 Gegeben seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch $U(0,\theta)$-verteilt mit $\theta \in \Theta = (0,\infty)$ und die für θ suffiziente Statistik $T(X) = \max_{1\le i\le n} X_i$.

(a) Zeigen Sie, dass $S(X) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ erwartungstreu für θ ist und berechnen Sie $Var_\theta(S(X))$.

(b) Berechnen Sie $\tilde{S}(X) = E[S(X)|T(X)]$ und bestimmen Sie $Var_\theta(\tilde{S}(X))$. Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) mit dem Rao-Blackwell-Theorem.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die bedingte Verteilung $X_i|T(X)$ durch $\frac{1}{n}\delta_{T(X)} + \frac{n-1}{n}U(0,T(X))$ gegeben ist. Dabei bezeichne δ_x das in x konzentrierte Punktmaß.

(c) Zeigen Sie, dass $T(X)$ minimal suffizient ist.

(d) Bestimmen Sie den MVUE für θ.

Aufgabe 2 Es seien $X = (X_1, \ldots, X_n)$ unabhängig identisch verteilt mit

$$P_\theta(X_i = x) = \begin{cases} \theta & \text{falls } x = -1 \\ (1-\theta)^2\theta^x & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

und $\theta \in \Theta = (0,1)$, wobei $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$T(X) = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{-1\}}(X_i), \sum_{i=1}^n X_i \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0}(X_i) \right)$$

minimal suffizient für θ ist.
Hinweis: Vergleichen Sie die von $T(X)$ induzierte Partition mit Theorem 1 in Kapitel 2.3.2.

(b) Ist $T(X)$ eine (beschränkt) vollständige Statistik?

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass die folgenden Familien von Verteilungen 2-parametrige Exponentialfamilien sind und geben Sie C, Q_j, t_j, $j = 1,2$ und h an.

(a) Die Familie der Gammaverteilungen mit Dichte

$$g_{p,\lambda}(x) = \frac{\lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(p)} \text{ für } x \ge 0 \quad \text{mit} \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$$

wobei $\lambda, p > 0$.

(b) Die Familie der Betaverteilungen mit Dichte

$$b_{r,s}(x) = \frac{x^{r-1}(1-x)^{s-1}}{B(r,s)} \text{ für } x \in [0,1] \quad \text{mit} \quad B(r,s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

wobei $r, s > 0$.

Nehmen Sie nun an, dass $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariablen sind mit einer der obigen Verteilungen.

(c) Geben Sie die natürliche suffiziente Statistik an für (p,λ) bzw. (r,s).