Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Beran
16. Januar 2008

WS 2007/08

8. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

Aufgabe 1

Sei $\hat{\theta}_n$ ein Schätzer für $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, v(\theta))$ für $n \to \infty$, wobei $N(0, v(\theta))$ die Normalverteilung mit positiver Varianzfunktion $v(\theta)$ bezeichnet. Konstruieren sie einen Schätzer $\tilde{\theta}_n$ für den gilt $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, w(\theta))$, wobei $w(\theta) = v(\theta)$ für $\theta \neq \theta_0$ und $w(\theta_0) = t^2 v(\theta_0)$ gilt mit einem beliebigen $\theta_0 \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$.

Aufgabe 2

Die Zufallsvariable X sei bedingt auf λ gemäß Poi(λ) verteilt, d.h.

$$P(X = x|\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, \ldots$$

wobei λ die a priori-Verteilung $G(\alpha, \beta)$ besitzt, wobei $G(\alpha, \beta)$ die Gammaverteilung mit Dichte $f_{\alpha,\beta}(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}\exp(-\beta\lambda), \lambda > 0$ bezeichnet. Dabei nehmen wir an, dass $\alpha \in \mathbb{N}$ und $\beta > 0$ gelte und α, β bekannt seien.

(a) Zeigen Sie, dass die unbedingte Verteilung von X eine negative Binomialverteilung ist.

(b) Zeigen Sie, dass die a posteriori-Verteilung von λ wieder eine Gammaverteilung ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Bayes-Schätzer für λ bzgl. der quadratischen Verlustfunktion basierend auf einer Beobachtung von X gegeben ist durch

$$\hat{\lambda}_B = \frac{1}{1+\beta}X + \frac{\beta}{1+\beta}\frac{\alpha}{\beta}.$$

Aufgabe 3

(a) Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine beliebige Stichprobe mit Ordnungsstatistiken $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$. Welche der folgenden Statistiken sind equivariant bzgl. einer linearen Transformation $y = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) $T_1(X) = X_{(1)}$, (ii) $T_2(X) = X_{(n)}$, (iii) $T_3(X) = (X_{(1)} + X_{(n)})/2$.

Betrachten Sie für $1 \leq r \leq s \leq n$ die Statistik

$$T_4(X) = \sum_{i=r}^{s} X_{(i)}.$$

Für welche Werte von r und s ist T_4 equivariant bgzl. linearer Transformationen?

(b) Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe mit Werten auf dem Halbkreis $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$. Jeder Winkel $\theta \in [0, \pi)$ kann (eindeutig) dem Punkt $s_\theta = (Re(e^{i\theta}), Im(e^{i\theta})) \in S$ zugeordnet werden. Damit lassen sich die Statistiken $T_1 = s_{\bar{\theta}}$ und $T_2 = s_{\frac{1}{2}(\theta_{(1)}+\theta_{(n)})}$ definieren, wobei $\bar{\theta}$ das arithmetische Mittel und $\theta_{(1)}$ bzw. $\theta_{(n)}$ das Minimum bzw. Maximum der Winkel $\theta_1, \ldots, \theta_n$ von X bezeichnet.
Zeigen Sie, dass T_1 und T_2 equivariante Statistiken bzgl. Rotationen auf S um einen Winkel $0 \leq \phi < \pi$ sind.

Aufgabe 4

(a) Es sei $(X_1, \dots, X_n), n \geq 2$ eine Stichprobe aus einer Exponentialverteilung auf dem Intervall (a, ∞) mit Skalierungsparameter θ, d.h. die Dichte von X_i ist gegeben durch

$$f(x) = \theta^{-1} e^{-(x-a)/\theta}, \quad x > a.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$ und $X_{(1)}$ unabhängig sind für beliebige (a, θ).

(b) Es sei $(X_1, \dots, X_n), n \geq 2$ eine Stichprobe aus einer Uniformverteilung über dem Intervall $[a, b]$, wobei $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie, dass $Z_i = (X_{(i)} - X_{(1)})/(X_{(n)} - X_{(1)})$ für $i = 2, \dots, n-1$ unabhängig von $(X_{(1)}, X_{(n)})$ ist.
Hinweis: Benutzen Sie dabei, dass die gemeinsame Lebesguedichte von $(X_{(1)}, X_{(n)})$ gegeben ist durch

$$\frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(y-x)^{n-2}, \quad a < x < y < b.$$