

---

Übungsblatt 12 zur Linearen Algebra I

---

**Aufgabe 1:**

(a) Sei  $K$  ein Körper. Zeige

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

für alle  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2 \in K$ .

(b) Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $A \in \{-1, 1\}^{n \times n} \subseteq \mathbb{Z}^{n \times n}$ . Zeige, dass die Determinante von  $A$  eine ganze Zahl ist, die von  $2^{n-1}$  geteilt wird.

**Aufgabe 2:** Zeige, dass es zu jedem  $x \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$  ein  $p \in \mathbb{Q}[X]$  mit  $p \neq 0$  und  $p(x) = 0$  gibt.

**Aufgabe 3:** Sei  $K$  ein endlicher Körper mit  $k$  Elementen und  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Wie viele invertierbare  $n \times n$ -Matrizen gibt es über  $K$ ?
- (b) Wie viele  $n \times n$ -Matrizen gibt es über  $K$ , die mit jeder anderen  $n \times n$ -Matrix über  $K$  multiplikativ kommutieren?
- (c) Für wie viele  $n \times n$ -Matrizen  $A \in K^{n \times n}$  gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $A^m = I_n$ ?

**Aufgabe 4:** Seien  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $T_1, \dots, T_{n+1} \subseteq \{1, \dots, n\}$ . Zeige: Es existiert ein  $k \in \mathbb{N}$  und paarweise verschiedene  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n+1\}$  mit  $T_{i_1} \Delta \dots \Delta T_{i_k} = \emptyset$ .

**Zusatzaufgabe für Interessierte:** Seien  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ . Zeige

$$\prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{x_j - x_i}{j - i} \in \mathbb{Z}.$$

**Hinweis:** (E seien  $x_1, \dots, x_n$  paarweise verschieden. Verwende Induktion nach  $n$ . Bestimme im Induktionsschritt von  $n-1$  nach  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) das Polynom

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1(x_1 - 1)) & \dots & (x_1(x_1 - 1) \cdots (x_1 - n + 2)) \\ 1 & x_2 & (x_2(x_2 - 1)) & \dots & (x_2(x_2 - 1) \cdots (x_2 - n + 2)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & T & (T(T - 1)) & \dots & (T(T - 1) \cdots (T - n + 2)) \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}[T],$$

indem Du zunächst seinen Grad, dann seine Nullstellen und dann mit der Induktionsvoraussetzung seinen Leitkoeffizienten bestimmst. Zeige, dass die *Binomialkoeffizienten*  $\binom{x}{j} = \prod_{k=1}^j \frac{x-k+1}{k}$  für alle  $x \in \mathbb{Z}$  und  $j \in \mathbb{N}_0$  ganze Zahlen sind und betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} \binom{x_1}{0} & \binom{x_1}{1} & \cdots & \binom{x_1}{n-1} \\ \binom{x_2}{0} & \binom{x_2}{1} & \cdots & \binom{x_2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{x_n}{0} & \binom{x_n}{1} & \cdots & \binom{x_n}{n-1} \end{pmatrix}.$$

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 28. Januar 2014, um 9:55 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.