Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2013/2014

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1:

(a) Betrachte die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}.$$

Bestimme Definitions- und Zielmenge sowie die Funktionsvorschrift für $f \circ g$ und $g \circ f$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Betrachte die Selbstabbildungen f und g von $\{0, \dots, n\}$, die gegeben sind durch $f(i) = i + 1$ für $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $f(n) = 0$ und $g(i) = n - i$ für $i \in \{0, \dots, n\}$. Zeige, dass f und g Permutationen sind und bestimme $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f^{-1})(n)$ und $(f^{-1} \circ g^{-1})(0)$.

(c) Betrachte die Abbildung

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ i \mapsto (\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ j \mapsto 2ij).$$

Bestimme $(g(3))(2)$ sowie $(g((g(2))(1)))(3)$. Ist g injektiv/surjektiv/bijektiv?

Aufgabe 2: Begründe jeweils alle Antworten zu folgenden Fragen:

(a) Betrachte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl z mit $z \leq x$ bezeichnet. Betrachte nun $h : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{R}},\ g \mapsto f \circ g$. Ist h injektiv? Ist h surjektiv? Wie viele $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ gibt es mit $h(g) = f$?

(b) Es bezeichne A die Menge aller bijektiven Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^{>0}$ und B die Menge aller bijektiven Funktionen von $\mathbb{R}^{>0}$ nach $\mathbb{R}$. Entscheide, ob

$$A \to B,\ f \mapsto f^{-1}$$

injektiv/surjektiv/bijektiv ist.

(c) Setze $F := \{f \mid S \subseteq \mathbb{R},\ f\colon S \to \mathbb{R}\}$. Definiere

$$r\colon \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to F,\ (f, S) \mapsto f|_S.$$

Bestimme den Wertebereich von $r((\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3), \mathbb{R}_{>0})$.
Ist r injektiv/surjektiv/bijektiv?

Aufgabe 3:

(a) Es seien $f\colon A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ Abbildungen. Zeige

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

(b) Gilt für beliebige Selbstabbildungen f und g einer Menge A stets $f \circ g = g \circ f$?

Aufgabe 4: Beantworte die folgenden Fragen. Begründe alle Antworten. Existiert eine surjektive Abbildung

(a) von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$?

(b) von $\mathbb{N}$ nach $\prod_{i\in\{0,1\}} \mathbb{N}$?

(c) von $\mathbb{N}$ nach $\prod_{i\in\mathbb{N}}\{0,1\}$?

Zusatzaufgabe für Interessierte: Existiert eine surjektive Abbildung

(a) von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nach $\mathbb{R}$?

(b) von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Begründe die Antworten.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 05. November 2013, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.