Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2013/2014

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Welche der folgenden Relationen sind reflexiv/symmetrisch/transitiv? Welche sind Äquivalenzrelationen?

(a) die Relation $|$ auf $\mathbb{N}$ definiert durch $a \mid b \;:\Longleftrightarrow\; a$ teilt $b \quad (a, b \in \mathbb{N})$

(b) $\equiv_\infty$ auf $\mathbb{Z}^\mathbb{N}$ definiert durch $f \equiv_\infty g :\Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{Z}_{>m} : f(n) = g(n)$

(c) R auf der Menge der (derzeit lebenden) Menschen, wobei xRy für Menschen x und y genau dann gelte, wenn x und y miteinander blutsverwandt sind

(d) $\sim$ auf der Menge der Dreiecke (in der Ebene), wobei $\Delta_1 \sim \Delta_2$ für Dreiecke Δ_1 und Δ_2 genau dann gelte, wenn Δ_1 und Δ_2 kongruent (das heißt deckungsgleich) sind

Aufgabe 2: Bezeichne $\mathscr{R}$ die Menge aller Relationen auf $\mathbb{N}$ und seien drei Funktionen $R, T, S \colon \mathscr{R} \to \{0, 1\}$ definiert durch

$$\begin{aligned} R(\sim) = 1 &\iff \sim \text{ ist reflexiv,} \\ T(\sim) = 1 &\iff \sim \text{ ist transitiv,} \\ S(\sim) = 1 &\iff \sim \text{ ist symmetrisch.} \end{aligned}$$

Zeige, dass $\mathscr{R} \to \{0, 1\}^3,\ \sim \mapsto (R(\sim), T(\sim), S(\sim))$ surjektiv ist.

Aufgabe 3: Sei A eine Menge.

(a) Zeige, dass jeder Schnitt von Äquivalenzrelationen auf A wieder eine Äquivalenzrelation auf A ist, das heißt: Ist $\mathscr{E}$ eine Menge von Äquivalenzrelationen auf A, so ist $\bigcap \mathscr{E}$ wieder eine Äquivalenzrelation auf A, wobei man $\bigcap \emptyset := A \times A$ setze.

(b) Zeige, dass für jede Relation $\to$ auf A durch

$$a \leftrightarrow b :\Longleftrightarrow (a \to b \text{ oder } b \to a)$$

$(a, b \in A)$ eine symmetrische Relation auf A und durch

$$a \sim b :\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : \exists a_0, \ldots, a_n \in A : (a = a_0 \leftrightarrow a_1 \leftrightarrow a_2 \cdots \leftrightarrow a_n = b)$$

$(a, b \in A)$ eine Äquivalenzrelation auf A definiert wird.

(c) Zeige, dass es zu jeder Relation R auf A eine *kleinste* Äquivalenzrelation $\sim$ auf A mit $R \subseteq \sim$ gibt (das heißt $R \subseteq \sim \in \mathscr{E}$ und $\sim \subseteq E$ für jede alle $E \in \mathscr{E}$ mit $\sim \subseteq E$).

Aufgabe 4: Sei A eine Menge und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Begründe, warum es eine kleinste Äquivalenzrelation $\sim$ auf A^n gibt mit

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \sim (a_2, \ldots, a_n, a_1)$$

für alle $a_1, \ldots, a_n \in A$.

(b) Begründe, warum es eine kleinste Äquivalenzrelation $\approx$ auf A^n gibt mit

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \approx (a_2, \ldots, a_n, a_1) \qquad \text{und} \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \approx (a_n, \ldots, a_2, a_1)$$

für alle $a_1, \ldots, a_n \in A$.

(c) Begründe, warum man die Elemente der Quotientenmenge $A^n/{\sim}$ *getragene Halsketten* der Länge n über A nennt.

(d) Begründe, warum man die Elemente der Quotientenmenge $A^n/{\approx}$ *ungetragene Halsketten* der Länge n über A nennt.

(e) Bestimme jeweils die Anzahl der getragenen und ungetragenen Halsketten der Länge 6 über einer zweielementigen Menge.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Finde ein Beispiel für eine Menge G und eine Funktion $+ : G \times G \to G$ so, dass $+$ auf G nicht assoziativ ist, aber die drei anderen Axiome abelscher Gruppen erfüllt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 12. November 2013, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.