
Übungsblatt 5 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Stelle von folgenden Abbildungen fest, ob es sich um Homo-, Mono-, Epi- oder Isomorphismen (bzw. nichts davon) handelt und ermittle ggf. $\ker(f)$. Beweise Deine Antworten.

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
- (b) $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot), x \mapsto 2^x$
- (c) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto a + b$
- (d) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Q}, (a, q) \mapsto (a, 0, q)$

Aufgabe 2: Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $n\mathbb{Z} := \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

- (a) Finde einen Monomorphismus $f : \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/169\mathbb{Z}$.
- (b) Ist $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/169\mathbb{Z}$? Beweise Deine Antwort.

Aufgabe 3: Es sei G eine abelsche Gruppe, $\emptyset \neq E \subseteq G$. Definiere eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von G durch $A_0 := E, A_{n+1} := A_n \cup \{a + b \mid a, b \in A_n\} \cup \{-a \mid a \in A_n\}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Zeige: $\langle E \rangle_G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$.

Aufgabe 4: Für $a, b \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\text{ggT}(a, b)$ den größten gemeinsamen Teiler von a und b , das heißt die größte ganze Zahl z , die sowohl Teiler von a als auch von b ist (hierbei setzen wir $\text{ggT}(0, 0) := 0$). Betrachte die Struktur $T := (\mathbb{N}_0, \text{ggT})$.

- (a) Zeige: T erfüllt alle Axiome für abelsche Gruppen bis auf die Existenz von Inversen.
- (b) Finde eine fünfelementige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ so, dass (A, ggT) alle Axiome abelscher Gruppen außer der Existenz von Inversen erfüllt und ein $n \in A$ existiert mit $n \neq 0$ und $\text{ggT}(a, n) = \text{ggT}(n, a) = a$ für alle $a \in A$.
- (c) Zeige, dass jedes $A \subseteq \mathbb{N}_0$, das die in (b) aufgeführten Eigenschaften hat, endlich ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte:

- (a) Es seien $(G, +_G)$ und $(H, +_H)$ abelsche Gruppen, ferner $\sigma : G \rightarrow H$ und $\tau : H \rightarrow G$ Homomorphismen. Folgt dann, dass G und H isomorph sind? Beweise Deine Antwort. (2 Punkte)
- (b) Es seien $(G, +_G)$ und $(H, +_H)$ abelsche Gruppen, ferner $\sigma : G \rightarrow H$ und $\tau : H \rightarrow G$ Monomorphismen. Folgt dann, dass G und H isomorph sind? Beweise Deine Antwort. (8 Punkte)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 26. November 2013, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.