Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2013/2014

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 7 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Entscheide jeweils, ob es sich (zusammen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation) um Körper handelt.

(a) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

(b) $\{a + \frac{1}{2}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

(c) $\{a + \frac{1}{n}b \mid a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

(d) $\{\sum_{i=1}^{n} q_i\sqrt{i} \mid n \in \mathbb{N}, q_1, ..., q_n \in \mathbb{Q}\}$

Aufgabe 2: Es sei $K := \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$.

(a) Zeige

$$\overline{1}^{(X^2+1)} = \left\{\sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k X^{2k} + \sum_{k=0}^{m} b_k(-1)^k X^{2k+1} \mid m \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{Q}, \right.$$
$$\left. a_0 + \cdots + a_m = 1, b_0 + \cdots + b_m = 0\right\}.$$

(b) Zeige: K ist ein Körper mit einer imaginären Einheit.

(c) Ist K isomorph zu $\mathbb{C}$?

Aufgabe 3: Zu $c \in \mathbb{R}$ betrachte $K_c := \mathbb{R}[X]/(X^2 + c)$. Beantworte folgende Fragen (mit Beweis): Für welche c ist K_c ein Körper? Für welche c ist K_c isomorph zu $\mathbb{R}$? Für welche c ist K_c isomorph zu $\mathbb{C}$?

Aufgabe 4: Zeige:

(a) $z^3 = z^*$ für alle $z \in \mathbb{F}_9$

(b) $z^7 = z^*$ für alle $z \in \mathbb{F}_{49}$

Zusatzaufgabe für Interessierte:

(a) Zeige: Für alle natürlichen Zahlen m und n ist $\mathrm{ggT}(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{\mathrm{ggT}(m,n)} - 1$.

(b) Die Fibonaccifolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist definiert durch $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_{n+2} := F_n + F_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige: Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathrm{ggT}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{ggT}(m,n)}$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 10. Dezember 2013, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.