
Übungsblatt 9 zur Linearen Algebra I

Auf dem ganzen Blatt gilt: Auf Matrizen durchgeführte Zeilenoperationen sind stets explizit anzugeben. Für Aufgabe 5 gibt es 20 Punkte, für jede andere Aufgabe 10 Punkte. Der Pflichtteil besteht aus den Aufgaben 1 bis 5, mit den Aufgaben 6 und 7 sowie der Zusatzaufgabe könnt ihr Zusatzpunkte sammeln.

Aufgabe 1: Führe die folgenden beiden Matrizen durch Zeilenumformungen ineinander über oder zeige, dass das unmöglich ist.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Aufgabe 2: Betrachte

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}.$$

- (a) Bringe A in reduzierte Stufenform.
- (b) Bestimme eine Basis des Zeilenraums von A .
- (c) Bestimmen eine Basis des Kerns von A .

Aufgabe 3: Finde jeweils ein homogenes lineares Gleichungssystem mit der angegebenen Menge als Lösungsmenge.

(a) $\text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{R}^4$

(b) $\text{span} \left(\begin{pmatrix} \bar{6} \\ \bar{2} \\ \bar{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{1} \\ \bar{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{5} \\ \bar{4} \\ \bar{3} \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{F}_7^3$

Aufgabe 4: Es seien A und B zwei Matrizen über einem Körper K mit jeweils n Spalten. Zeige:

- (a) $\ker(A) \subseteq \ker(B) \iff \text{row}(A) \supseteq \text{row}(B)$
- (b) $\ker(A) \subseteq \text{row}(B) \iff \text{row}(A) \supseteq \ker(B)$
- (c) $\text{row}(A) \subseteq \ker(B) \iff \ker(A) \supseteq \text{row}(B)$

Aufgabe 5: Betrachte den Unterring $\mathbb{Z}[i]$ der *ganzen Gaußschen Zahlen* von \mathbb{C} . Wir betrachten ein Gleichungssystem

$$(*) \quad Ax = 0 \quad (x \in \mathbb{C}^n)$$

mit $A \in \mathbb{Z}[i]^{m \times n}$.

- (a) Zeige $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
- (b) Zeige, dass $\varphi: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{F}_9, a + bi \mapsto a^{-(3)} + b^{-(3)}i$ ein Homomorphismus ist.
- (c) Zeige: Wenn $(*)$ eine Lösung $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ hat, dann hat $(*)$ auch eine Lösung $x \in \mathbb{Q}[i]^n \setminus \{0\}$.
- (d) Zeige: Wenn $(*)$ eine Lösung $x \in \mathbb{Q}[i]^n \setminus \{0\}$ hat, dann hat $(*)$ auch eine Lösung $x \in \mathbb{Z}[i]^n \setminus \{0\}$.
- (e) Zeige: Wenn $(*)$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}[i]^n \setminus \{0\}$ hat, dann hat das Gleichungssystem, welches aus $(*)$ durch Anwenden von φ auf alle seine Koeffizienten entsteht, eine Lösung $x \in \mathbb{F}_9^n \setminus \{0\}$.
- (f) Bestimme die Lösungsmenge von $(*)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i & 1 & i & 1+i & -1+i \\ -1+i & 1 & 1+i & 1-i & 1 & i & 1+i \\ 1+i & -1+i & 1 & 1+i & 1-i & 1 & i \\ i & 1+i & -1+i & 1 & 1+i & 1-i & 1 \\ 1 & i & 1+i & -1+i & 1 & 1+i & 1-i \\ 1-i & 1 & i & 1+i & -1+i & 1 & 1+i \\ 1+i & 1-i & 1 & i & 1+i & -1+i & 1 \end{pmatrix}$$

- (g) Bestimme eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ in reduzierter Stufenform mit $A \sim B$.

Aufgabe 6: Seien $p \in \mathbb{P}$, $Q := \{c^2 \mid c \in \mathbb{F}_p^\times\}$ und $a, b \in \mathbb{F}_p^\times \setminus Q$. Zeige:

- (a) Q ist eine Untergruppe von \mathbb{F}_p^\times .
- (b) $\varphi: \mathbb{F}_p^\times \rightarrow Q$, $c \mapsto c^2$ ist ein Gruppenepimorphismus.
- (c) $\#\ker \varphi \leq 2$
- (d) $\#(\mathbb{F}_p^\times/Q) \leq 2$
- (e) $\frac{a}{b} \in Q$
- (f) $\mathbb{F}_p[X]/(X^2 - a) \cong \mathbb{F}_p[X]/(X^2 - b)$

Aufgabe 7: Seien G und H abelsche Gruppen mit $\#G = \#H \in \mathbb{P}$. Zeige $G \cong H$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Seien $p \in \mathbb{P}$ und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$. Zeige:

- (a) Es ist p ein Teiler von a , falls $p \neq 2$.
- (b) Es ist p^2 ein Teiler von a , falls $p \notin \{2, 3\}$.

Hinweis: Zeige $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ und verwende für Teil (b) dieses Ergebnis geschickt.

Abgabe bis Dienstag, den 7. Januar 2013, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.