Fachbereich Mathematik und Statistik WS 14/15
der Universität Konstanz 27.10.2014
Prof. Dr. Arno Fehm, Dr. Merlin Carl Zettel 1

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Finde Darstellungen für folgende Mengen in aufzählender Form (d.h. mit expliziter Angabe sämtlicher Elemente):
(a) $(\{\text{Apfel,Seehund,Banane}\} \cup \{1, 2, ..., 500\}) \cap (\{x|x \text{ Säugetier}\} \cup \{x|x \text{ Kubikzahl}\})$
(b) $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset)))$
(c) $(\{2i|i \in \mathbb{N}\} \cap \{p|p \text{ ist Primzahl}\}) \setminus \{z \in \mathbb{Z}|z \leq 0\}$

Aufgabe 2: Bei welchen der folgenden Paare $(G, \cdot)$ von einer Menge G und einer Funktion $\cdot : G \times G \to G$ handelt es sich um eine abelsche Gruppe? Begründe Deine Antworten.
(a) $(\mathbb{Q}, +)$, wobei $+$ die übliche Addition rationaler Zahlen bezeichnet
(b) $(\mathbb{Q}, \oplus)$, wobei $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$
(c) $(\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N}), \circ)$, wobei $\circ$ die Komposition von Funktionen bezeichnet
(d) $(\mathrm{F}(\mathbb{R}^2), \circ)$, wobei $\mathrm{F}(\mathbb{R}^2)$ die Menge der abstandstreuen Abbildungen der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ auf sich selbst und $\circ$ die Komposition von Funktionen bezeichnet. (Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt `abstandstreu`, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ der Abstand von x und y gleich dem Abstand von $f(x)$ und $f(y)$ ist.)
(e) $(\mathbb{Z}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation rationaler Zahlen bezeichnet.

Aufgabe 3: Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv? Begründe Deine Antworten.
(a) $f(x) = x^2$ als Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bzw. als Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$
(b) $f(x) = x^3$ als Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ bzw. als Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$
(c) $g : M \to \mathbb{N}$, wobei M die Menge der derzeit lebenden Menschen bezeichnet und g die Funktion ist, die jedem Menschen sein Geburtsjahr zuordnet.
(d) $t : \mathbb{N}_{\geq 2} \to \mathbb{P}$, wobei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen bezeichnet und t die Funktion ist, die jeder natürlichen Zahl n die größte Primzahl p zuordnet, die n teilt.
(e) $d : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, wobei $2\mathbb{N}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen bezeichnet und d die Funktion ist, die jeder natürlichen Zahl n ihr Doppeltes $2n$ zuordnet.

Aufgabe 4: Es seien A und B endliche Mengen mit $|A| = a$ und $|B| = b$. Beantworte folgende Fragen und begründe deine Antworten.
(a) Wie viele Elemente hat $\mathfrak{P}(A)$?
(b) Wie viele bijektive Abbildungen $f : A \to A$ gibt es?
(c) Wie viele injektive Abbildungen $f : A \to B$ gibt es?

Zusatzaufgabe für Interessierte:
Finde ein Beispiel für eine Menge G und eine Funktion $+ : G \times G \to G$ so, dass $+$ auf G nicht assoziativ ist, aber die drei anderen Axiome $G2 - G4$ abelscher Gruppen erfüllt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 03.11.2014, 9.55. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.