Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Arno Fehm, Dr. Merlin Carl

WS 14/15
19.01.2015
Zettel 10

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 35: Es sei K ein Körper.
(a) Es sei $T : K^2 \to K^2$ gegeben durch $T((x_1, x_2)) = (x_1, 0)$. Zeige, dass T linear ist und bestimme die darstellende Matrix von T bezüglich der Standardbasis von K^2.
(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$. Außerdem setzen wir $D(P) = P'$, wobei P' die Ableitung von P nach x bezeichnet. Zeige, dass D eine lineare Abbildung von V nach V ist und bestimme die Matrix von D bezüglich der Basis $\mathscr{B} := (x^0, ..., x^n)$ von V.
c) Betrachte $f : K^5 \to K^5$, gegeben durch $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Finde die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis von K^5.
d) Es sei $\mathbb{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Finde die Transformationsmatrix des Basiswechsels von der Standardbasis von K^4 nach $\mathbb{B}$.

Aufgabe 36: Entscheide für jede der folgenden Wahlen eines Körpers K, zweier K-Vektorräume V_1 und V_2 sowie zweier Untervektorräume U_1 von V_1 bzw. U_2 von V_2, ob $V_1/U_1 \cong V_2/U_2$. Beweise deine Antworten.
(a) $K = \mathbb{R}$, $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{(x, 0)^t : x \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(0, x)^t : x \in \mathbb{R}\}$
(b) $K = \mathbb{Q}$, $V_1 = \mathbb{Q}^4$, $V_2 = \mathbb{Q}^2$, $U_1 = \{(a, -a + b, b, 2a + b)^t : a, b \in \mathbb{Q}\}$, $U_2 = \{0\}$
(c) K beliebig, $n \in \mathbb{N}$, $V_1 = V_2 = \mathrm{Mat}_n(K)$, $U_1 = \{A \in V_1 : (\forall i, j \in \mathbb{N})(A)_{ij} = (A)_{ji}\}$, $U_2 = \{A \in V_2 : (\forall i, j \in \mathbb{N})(A)_{ij} = (A)_{(n+1-i)j}\}$

Aufgabe 37: Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.
(a) Zeige: $A \subseteq V$ ist genau dann ein affiner Unterraum von V, wenn $A + (-a)$ für jedes $a \in A$ ein Untervektorraum von V ist.
(b) Zeige: Sind $A = U + v$ und $A' = U' + v'$ affine Unterräume von V, so ist $A \cap A' = \emptyset$ genau dann, wenn $v - v' \notin U + U'$.

Aufgabe 38: Es sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler Vektorraum, $\mathscr{B}$ eine Basis von V. Ferner sei $\mathfrak{B}$ die Menge aller Basen $(x_1, ..., x_n)$ von V. Die Abbildung $f : \mathfrak{B} \to \mathrm{GL}_n(K)$ sei gegeben durch $f(\mathscr{B}') = T^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$ (wobei $T^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$ die Transformationsmatrix des Basiswechsels von $\mathscr{B}$ nach $\mathscr{B}'$ bezeichnet). Zeige: f ist bijektiv.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Für $g \in G$ sei $g + H := \{g + h : h \in H\}$.
Es bezeichne nun G/H die Menge $\{g + H : g \in G\}$.
(a) Zeige: Sind $g_1, g_2, g_1', g_2' \in G$, $g_1 + H = g_1' + H$ und $g_2 + H = g_2' + H$, so ist auch $(g_1 + g_2) + H = (g_1' + g_2') + H$. Es ist also durch $\oplus : G/H \times G/H \to G/H$, $(g_1 + H) \oplus (g_2 + H) = (g_1 + g_2) + H$ eine Verknüpfung auf G/H definiert.
(b) Zeige: G/H bildet mit $\oplus$ eine abelsche Gruppe.
(c) Es seien G, H abelsche Gruppen, $f : G \to H$ ein Gruppenepimorphismus. Zeige: $G/\ker(f) \cong H$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 26.01.2015, 9.55. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.