Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Arno Fehm, Dr. Merlin Carl

WS 14/15
26.01.2015
Zettel 11

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 39:
a) Bestimme den Lösungsraum des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \quad (1)$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \quad (2)$$
$$6x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 16 \quad (3)$$
$$5x_1 + 7x_2 - 11x_3 = -24 \quad (4)$$

Gib die Zwischenschritte an!
b) Bestimme den Lösungsraum des folgenden Gleichungssystems S über $\mathbb{F}_{13}$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$3x_1 + 14x_2 = 2 \quad (1)$$
$$4x_1 - 7x_2 = 5 \quad (2)$$

Gib auch hier die Zwischenschritte an.
c) Hat S über $\mathbb{F}_7$ eine Lösung? Die Antwort ist zu begründen.

Aufgabe 40: Bestimme für jede der folgenden Wahlen eines Körpers K, zweier K-Vektorräume V_1, V_2 sowie einer linearen Abbildung $f : V_1 \to V_2$ den Rang von f.
(a) $K = \mathbb{R}$, $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[X]_{\leq 20}$, $f(p) = p'$ (wobei p' die Ableitung von p bezeichnet).
(b) $K = \mathbb{Q}$, $V_1 = V_2 = \mathrm{Mat}_7(\mathbb{Q})$, $f(A) = A - A^t$
(c) $K = \mathbb{F}_{17}$, $V_1 = \mathbb{F}_{17}^8$, $V_2 = \mathbb{F}_{17}^9$, $f((a_1, ..., a_8)^t) = (a_8, a_1{+}a_2, a_2{+}a_3, a_1{+}a_3, a_4, a_1, a_2, a_3, a_7)^t$
(d) $K = \mathbb{F}_{13}$, $V_1 = V_2 = \mathbb{F}_{13}^3$, $f(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Aufgabe 41: Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, W ein Untervektorraum von V und U_1, U_2 Untervektorräume von W.
(a) Zeige: $U_1/(U_1 \cap U_2) \cong (U_1 + U_2)/U_2$.
(**Hinweis**: Betrachte die Inklusionsabbildung $U_1 \to U_1 + U_2$ sowie den Homomorphismus $\pi_{U_2} : U_1 + U_2 \to (U_1 + U_2)/U_2$ und wende den Homomorphiesatz an.)
(b) Zeige: W/U_1 ist ein Untervektorraum von V/U_1.
(c) Zeige: $(V/U_1)/(W/U_1) \cong V/W$.
(**Hinweis**: Betrachte die Homomorphismen $\pi_{U_1} : V \to V/U_1$ sowie $\pi_{W/U_1} : V/U_1 \to (V/U_1)/(W/U_1)$ und wende den Homomorphiesatz an.)

Aufgabe 42: Es bezeichne V den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$. Entscheide für jede der folgenden Wahlen eines Unterraumes U sowie einer Menge $F \subseteq V$ und eines $f \in V$, ob $\bar{f} \in \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\bar{g} : g \in F\}$ (wobei $\bar{h} := h + U$ für $h \in V$).
(a) U bestehe aus allen Folgen g, für die ein $K \in \mathbb{N}$ existiert mit $-K < g(i) < K$ für alle $i \in \mathbb{N}$. F bestehe aus allen Folgen der Form $(q^i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $q \in \mathbb{Q}$. f ist gegeben durch $f(i) = 1 - (-1)^i$.
(b) U bestehe aus allen Folgen g, für die ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $|g(i)| \leq ki$ für alle $i \in \mathbb{N}$. F besteht aus den Folgen der Form $(p(i) : i \in \mathbb{N})$, wobei $p \in \mathbb{Q}[X]$. f ist gegeben durch $f(k) = 2^k$.
(c) U bestehe aus den 2-periodischen Folgen (also den Folgen g mit $g(i) = g(i+2)$ für alle $i \in \mathbb{N}$), F aus allen 3-periodischen Folgen (also den Folgen g mit $g(i) = g(i+3)$ für alle $i \in \mathbb{N}$), und für $k \in \mathbb{N}_0$, $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist $f(5k + r) = r$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$.
Zeige: $|\mathrm{rk}(A) - \mathrm{rk}(B)| \leq \mathrm{rk}(A + B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B)$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 02.02.2015, 9.55. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.