Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Arno Fehm, Dr. Merlin Carl

WS 14/15
02.02.2015
Zettel 12

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 43:

(a) Überprüfe, ob die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar ist und bestimme ggf. ihr Inverses M^{-1} mit dem Gaußverfahren.

(b) Überprüfe, ob die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}$ invertierbar ist und bestimme ggf. ihr Inverses M^{-1} mit dem Gaußverfahren.

(c) Es sei V der $\mathbb{F}_7$-Vektorraum $\mathbb{F}_7[X]_{\leq 5}$, ferner bezeichnen wir für $p = \Sigma_{i=0}^5 a_i X^i \in V$ mit $\sigma(p)$ die Koeffizientensumme $\Sigma_{i=0}^5 a_i$. Bestimme alle Elemente p von V mit $\sigma(p + 2p'' + 4p''') = 0$ (wobei q' wie üblich die formale Ableitung von q bezeichnet).

Aufgabe 44: Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige: Sind $A_1, ..., A_k$ quadratische Matrizen über K der Dimensionen $d_1, ..., d_k$ mit $\Sigma_{i=1}^k d_i = n$, so hat jede Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ der Form $\begin{pmatrix} A_1 & & * \\ 0 & A_2 & \\ ... & & \\ 0 & ...0 & A_k \end{pmatrix}$ die Determinante $\Pi_{i=1}^k \det(A_i)$.

(b) Es seien $A_1, ..., A_k$ quadratische Matrizen über K der Dimensionen $d_1, ..., d_k$ mit $\Sigma_{i=1}^k d_i = n$, $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ von der Form $\begin{pmatrix} * & & A_1 \\ & A_2 & 0 \\ ... & & 0 \\ A_k & 0 & ... \end{pmatrix}$. Bestimme $\det(M)$ in Abhängigkeit von $\det(A_1), ..., \det(A_k)$.

Aufgabe 45:

(a) Bestimme die Determinante der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$ und über $\mathbb{F}_2$.

(b) Bestimme die Determinante der Matrix $M_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $(M_n)_{ij} = i + j$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bestimme die Determinante der Matrix $M_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $(M_n)_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 46:
(a) Zeige: Sind $K_0 \subseteq K_1$ Körper und ist $M \in \mathrm{Mat}_n(K_0)$, so ist M genau dann im Ring $\mathrm{Mat}_n(K_0)$ invertierbar, wenn M im Ring $\mathrm{Mat}_n(K_1)$ invertierbar ist.
(b) Für einen Körper K bezeichnen wir mit 0_K das neutrale Element der Addition und mit 1_K das neutrale Element der Multiplikation in K. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine Funktion $f : \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\} \to \{0, 1\}$ und einen Körper K bezeichnen wir mit M_K^f die Matrix mit $(M_K^f)_{ij} = f(i, j)_K$. Beweise oder widerlege: Für alle $f : \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\} \to \{0, 1\}$ ist $M_{\mathbb{Q}}^f$ genau dann invertierbar, wenn $M_{\mathbb{F}_2}^f$ invertierbar ist.
(c) Wir bezeichnen nun außerdem mit 2_K das Element $1_K + 1_K$. Beweise oder widerlege: Für alle $f : \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\} \to \{0, 1, 2\}$ ist $M_{\mathbb{F}_2}^f$ genau dann invertierbar, wenn $M_{\mathbb{F}_3}^f$ invertierbar ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es seien $2 \leq m, n \in \mathbb{N}$. Ein $m \times n$-Schiebepuzzle besteht aus einem rechteckigen Spielfeld mit Seitenlängen m und n, welches in Einheitsquadrate unterteilt ist. Zu Beginn liegt auf jedem Einheitsquadrat außer dem n-ten Einheitsquadrat in der m-ten Zeile ein Plättchen, wobei die Plättchen von links nach rechts und von oben nach unten fortlaufend mit $1, ..., mn - 1$ durchnummeriert sind. Diese Verteilung nennen wir die 'Ausgangskonstellation'. Es bleibt also ein Feld frei. Ein Zug besteht jeweils darin, ein Plättchen von einem Feld, das mit dem freien Feld eine gemeinsame Grenzlinie hat, auf das freie Feld zu schieben. Eine 'gültige Konstellation' ist eine durch solche Züge erreichbare Verteilung der Plättchen auf dem Feld, bei der das freie Feld die gleiche Position hat wie in der Ausgangskonstellation.
(a) Es sei $m = 3$, $n = 5$, ferner sei die Konstellation $\mathscr{K}$ mit der Ausgangskonstellation identisch bis auf die Plättchen mit den Nummern 1 und 2, deren Plätze vertauscht sind. Ist $\mathscr{K}$ gültig? Die Antwort ist zu beweisen.
(b) Es seien nun $m, n \geq 2$ beliebig. Eine Konstellation, bei der das freie Feld die gleiche Position hat wie in der Ausgangskonstellation, ist bestimmt durch eine Permutation $\pi : \{1, ..., mn - 1\} \to \{1, ..., mn - 1\}$. Zeige: Die auf diese Weise durch eine Permutation π gegebene Konstellation $\mathscr{K}_\pi$ ist genau dann gültig, wenn $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 09.02.2015, 9.55. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.