Fachbereich Mathematik und Statistik der Universität Konstanz Prof. Dr. Arno Fehm, Dr. Merlin Carl

WS 14/15
09.02.2015
Zettel 13

Übungen zur Linearen Algebra 1
Keine Abgabe

Aufgabe 47: Für $\alpha \in [0, 2\pi]$ sei $\phi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Winkel α im Uhrzeigersinn um den Punkt $(0, 0)$. Ferner sei $\mathscr{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}' = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}}\\\sqrt{\frac{1}{2}}\end{pmatrix})$, $\mathscr{B}'' := (\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}}\\\sqrt{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$.
(a) Bestimme die darstellenden Matrizen von ϕ_π, $\phi_{\frac{\pi}{2}}$ und $\phi_{\frac{\pi}{4}}$ bezüglich $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ und $\mathscr{B}''$.
(b) Bestimme alle Transformationsmatrizen zwischen $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ und $\mathscr{B}''$.

Aufgabe 48: Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Die 'Permanente' einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist definiert durch $\mathrm{perm}(A) := \Sigma_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} ... a_{n\sigma(n)}$. Beweise oder widerlege durch Angabe eines konkreten Gegenbeispiels:
(a) Die Permanente verhält sich linear in jeder Zeile der Matrix (wenn man die restlichen Zeilen festhält).
(b) Enthält A eine Nullspalte, so ist $\mathrm{perm}(A) = 0$.
(c) Sind sämtliche Einträge von A unterhalb der Diagonalen $= 0$, so ist $\mathrm{perm}(A)$ gleich dem Produkt der Diagonaleinträge von A.
(d) Enthält A zwei identische Zeilen, so ist $\mathrm{perm}(A) = 0$.
(e) Es ist stets $\mathrm{perm}(A) = \mathrm{perm}(A^t)$.

Aufgabe 49: Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:
(a) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 3}$.
(b) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$.
(c) $\begin{pmatrix}1 & i & 1 & i\\i & 1 & i & 1\\1 & 2 & 3 & 4\\i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

Aufgabe 50: Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum sowie $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$.
(a) Sei nun $K = \mathbb{R}$. Zeige: Für alle $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist $\mathrm{tr}(AA^t) \geq 0$. Gib an, wann Gleichheit auftritt.
(b) Zeige: Die Abbildung $\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ ist ein Epimorphismus von K-Vektorräumen.
(c) Zeige: Ist $f : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen, so existiert ein $B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ so, dass $f(A) = \mathrm{tr}(BA)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, U ein Unterraum von V und U' ein Unterraum von U. Zeige: $U \setminus U'$ ist kein affiner Unterraum von V.

Keine Abgabe