Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Arno Fehm, Dr. Merlin Carl

WS 14/15
03.11.2014
Zettel 2

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 5: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne S_n die Gruppe der Bijektionen $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ zusammen mit der Komposition als Verknüpfung. S_n heißt auch 'symmetrische Gruppe'.
(a) Zeige: Für $n \geq 3$ ist S_n nicht abelsch.
(b) Entscheide folgende Aussagen. Begründe deine Antworten.

- $\{-1, 0, 1\} \leq (\mathbb{Q}, +)$
- $\{f \in S_9 : f(1) = 1 \text{ und } f(4) = 4 \text{ und } f(8) = 8\} \leq S_9$
- $M_7 \leq (\mathbb{Z}, +)$, wobei M_7 die Menge der durch 7 teilbaren ganzen Zahlen bezeichnet
- $M_{2,7} \leq (\mathbb{Z}, +)$, wobei $M_{2,7}$ die Menge der ganzen Zahlen bezeichnet, die durch 7 oder durch 2 teilbar sind
- $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \leq (\mathbb{R}, +)$
- $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q} \text{ und } (a, b) \neq (0, 0)\} \leq (\mathbb{R}^\times, \cdot)$ Sie dürfen hier ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $D(\mathbb{R}^2) \leq (F(\mathbb{R}^2), \circ)$, wobei $D(\mathbb{R}^2)$ die Menge der Drehungen um den Ursprung und $F(\mathbb{R}^2)$ die Menge der abstandstreuen Abbildungen der Ebene (siehe Aufgabe $2d$ von Blatt 1) bezeichnet

Aufgabe 6: (a) Fülle die folgende Verknüpfungstafel so aus, dass sie eine abelsche Gruppe repräsentiert:

$*$	0	1	2	3	4
0	1	2	?	?	?
1	?	?	?	?	?
2	?	?	?	?	?
3	?	?	?	?	?
4	0	?	?	?	?

(b) Beweise die Eindeutigkeit der Lösung in (a).

Aufgabe 7: Es sei $(X, \cdot)$ eine Halbgruppe.
(a) Es sei $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$. Ein vollständig geklammertes Produkt von $(x_1, ..., x_n)$ ist von der Form x_1 (wenn $n = 1$) oder (wenn $n \geq 2$) von der Form (pq), wobei $r, s \in \mathbb{N}$ existieren mit $r + s = n$ und p ein vollständig geklammertes Produkt von $(x_1, ..., x_r)$ und q ein vollständig geklammertes Produkt von $(x_{r+1}, ..., x_n)$ ist. Zeige: Sind p_1 und p_2 vollständig geklammerte Produkte von $(x_1, ..., x_n)$, so ist $p_1 = p_2$.
(b) Zeige: Ist $\cdot$ kommutativ und sind $x_1, ..., x_n \in X$ und $\pi \in S_n$ (siehe Aufgabe 1), so ist $\Pi_{i=1}^n x_i = \Pi_{i=1}^n x_{\pi(i)}$.

Aufgabe 8: Es sei $(G, \cdot)$ eine Halbgruppe.
(a) $a \in G$ heiße Linksneutrales in G, falls $ab = b$ für alle $b \in G$ und Rechtsneutrales in G, falls $ba = b$ für alle $b \in G$. Seien $e_L, e_R \in G$ links- bzw. rechtsneutral. Beweise: $e_L = e_R$.
(b) $a \in G$ heiße Linksinverses zu $b \in G$, falls ab ein neutrales Element von G ist und Rechtsinverses zu b, falls ba ein neutrales Element von G ist. Beweise: Existieren zu einem Element x von G sowohl ein Rechtsinverses x_R^{-1} als auch ein Linksinverses x_L^{-1} in G, so ist $x_R^{-1} = x_L^{-1}$.
(c) Es sei X eine Menge mit mindestens 2 Elementen, $* : X \times X \to X$ gegeben durch $a * b = b$ für alle $a, b \in X$. Zeige: $(X, *)$ ist eine Halbgruppe, in der jedes Element linksneutral und kein Element rechtsneutral ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei R ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring so, dass $x^2 = 0$ für alle $x \in R$.
(a) Zeige: Für alle $a, b \in R$ ist $ab + ba = 0$.
(b) Zeige: Für alle $a, b, c \in R$ ist $abc + abc = 0$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 10.11.2014, 9.55. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.