Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Arno Fehm, Dr. Merlin Carl

WS 14/15
10.11.2014
Zettel 3

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 9:
(a) Schreibe die Verknüpfungstafeln für die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auf und bestimme die Einheiten von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n = 4, 5, 6$
(b) Finde für folgende Werte von n jeweils alle Elemente $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, die der Gleichung genügen. Begründe, warum es keine weiteren gibt. (Beachte, dass die Lösungsmenge auch leer sein kann.)

- $n = 5$, $3x = 1$
- $n = 7$, $x^2 = 2$
- $n = 11$, $x^2 + 1 = 0$
- $n = 9$, $x^3 = 0$
- $n = 12$, $2x = 4$
- $n = 12$, $2x - 3 = 0$

Aufgabe 10: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $p_n(X) = \Sigma_{i=1}^{2n} X^i \in \mathbb{R}[X]$ und $q_n(X) = \Sigma_{i=1}^{2n}(-1)^i X^i \in \mathbb{R}[X]$. Sei ferner $p_n(X)q_n(X) = \Sigma_{i=0}^{\infty} c_{n,i} X^i$. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $u \in \mathbb{N}$ ungerade, so ist $c_{n,u} = 0$.

Aufgabe 11: Zeige, dass $\mathbb{C}$, definiert wie in Beispiel 5.6 aus der Vorlesung, ein Körper ist.

Aufgabe 12:
(a) Bestimme die Charakteristiken von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n = 2, 3, 4, 5$. Stelle eine Vermutung über die Charakteristik von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ beliebig auf und beweise sie.
(b) Zeige: Ist $R \neq \{0\}$ ein Ring mit Einselement ohne Nullteiler mit Charakteristik $n \in \mathbb{N}$, so ist n eine Primzahl.

Zusatzaufgabe für Interessierte:
(a) Es sei $(X, *)$ eine kommutative Halbgruppe. Ferner existiere zu $x, y \in X$ stets ein $z \in X$ mit $x * z = y$. Zeige, dass dieses z stets eindeutig ist.
(b) Es sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring ohne Nullteiler. Zeige: Ist R kein Körper, so ist R unendlich.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 17.11.2014, 9.55. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.