Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Arno Fehm, Dr. Merlin Carl

WS 14/15
17.11.2014
Zettel 4

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 13:
(a) Führe die folgenden Polynomdivisionen mit Rest über den jeweiligen Körpern aus:

- $(1 + 3X^2 - X^5) : (X^2 + X^3)$ über $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
- $(X^5 + X^7 + X^8 + X^9) : (X + X^3)$ über $\mathbb{Q}$
- $(X^4 - 1) : (X^2 + 2)$ über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

(b) Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das reelle Polynom $1 - X^n$ ohne Rest durch das reelle Polynom $1 - X$ teilbar.
(c) Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das reelle Polynom $1 + X^{2n-1}$ ohne Rest durch das reelle Polynom $1 + X$ teilbar.
(d) Bestimme in Abhängigkeit von n Quotient und Rest der Polynomdivision $(1-(-X)^{3n}) : (X^2-X+1)$, d.h.: Bestimme zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Polynome $q_n, r_n \in \mathbb{Q}[X]$ so, dass $\deg(r_n) < 2$ und $(1 - (-X)^{3n}) = (X^2 - X + 1)q_n(x) + r_n$. Beweise deine Antwort.

Aufgabe 14: Überprüfe für jedes der folgenden Tripel aus einer Menge V, einer Abbildung $+ : V \times V \to V$ und einer Abbildung $\cdot$ mit Definitionsbereich $K \times V$, ob es sich um einen Vektorraum über dem Körper K handelt. Gib an, welche Vektorraumaxiome erfüllt sind und welche nicht. Begründe deine Antworten.

- $K = V = \mathbb{Q}$, $+$ die übliche Addition auf $\mathbb{Q}$, $c \cdot x = c + x - 1$
- $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Z}$, $+$ die übliche Addition auf $\mathbb{Q}$ und $\cdot$ die übliche Multiplikation auf $\mathbb{Q}$
- $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$, $+$ die übliche Addition auf $\mathbb{R}$, $x \cdot y = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$
- $K = \mathbb{R}$, $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, wobei $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ für alle $f, g \in V$ und $(cf)(x) = cf(x)$ für alle $c \in \mathbb{R}$, $f \in V$
- $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $+$ die übliche (komponentenweise) Addition auf $\mathbb{R}^2$, $c \cdot (x, y)$ der Punkt in $\mathbb{R}^2$, der sich durch Drehung von (x, y) um den Winkel c um $(0, 0)$ im Uhrzeigersinn (für $c \geq 0$) bzw. Gegenuhrzeigersinn (für $c < 0$) ergibt
- $K = \mathbb{R}$, $V = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = 1\}$, $+$ die übliche Addition von Polynomen, $c \cdot \Sigma_{i=0}^n a_i X^i = \Sigma_{i=0}^n (ca_i) X^i$ für alle $c \in \mathbb{R}$, $\Sigma_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$
- $K = \mathbb{R}$, $V = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = 0\}$, $+$ die übliche Addition von Polynomen, $c \cdot \Sigma_{i=0}^n a_i X^i = \Sigma_{i=0}^n (ca_i) X^i$ für alle $c \in \mathbb{R}$, $\Sigma_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$
- $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}$, $+$ die übliche Addition auf $\mathbb{R}$, $q \cdot x = x$ für alle $q \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 15: Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Nullstellen des Polynoms X^2 in $\mathbb{Z}/4^n\mathbb{Z}$ in Abhängigkeit von n. Vergleiche mit Korollar 6.10 aus der Vorlesung. Warum liegt kein Widerspruch vor?

Aufgabe 16:
(a) Das Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ habe vier paarweise verschiedene Nullstellen in $\mathbb{Z}$. Zeige, dass kein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit $f(k) = 11$.
(b) Es sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ so, dass paarweise verschiedene $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}$ existieren mit $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = f(a_4) = 7$. Zeige, dass kein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit $f(k) = 12$. Vermute einen allgemeineren Satz und beweise ihn.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Wir betrachten die abelsche Gruppe $(\mathbb{R}^4, +)$. Der Einfachheit halber führen wir die Abkürzungen $1 := (1,0,0,0)$, $i := (0,1,0,0)$, $j := (0,0,1,0)$ und $k := (0,0,0,1)$ ein. Den Quaternionenring $\mathbb{H}$ (nach seinem Entdecker Sir William Rowan Hamilton) erhält man, indem man auf den Elementen von $\mathbb{R}^4$ eine Multiplikation $* : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ erklärt, die durch folgende Tabelle gegeben ist:

$*$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

aus der sich das allgemeine Produkt $(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$ nun einfach durch die Forderung der Distributivität von $*$ ergibt.
(a) Zeige: Der Quaternionenring $\mathbb{H}$ ist ein nullteilerfreier Ring mit Einselement.
(b) Zeige: $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, *)$ ist eine nichtabelsche Gruppe.
Wir betrachten nun über $\mathbb{H}$ das Polynom $p = X^2 + 1$.
(c) Zeige: i, j, k sind Nullstellen von p. Vergleiche mit Korollar 6.10 aus der Vorlesung. Warum liegt kein Widerspruch vor?
(d) Zeige: Ist $b^2 + c^2 + d^2 = 1$ mit $b, c, d \in \mathbb{R}$, so ist $p(bi + cj + dk) = 0$.
Folgere: $X^2 + 1$ hat in $\mathbb{H}$ also sogar unendlich viele Nullstellen!

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 24.11.2014, 9.55. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.