Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Arno Fehm, Dr. Merlin Carl

WS 14/15
28.11.2014
Zettel 5

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 17:
(a) Sei V ein K-Vektorraum, X eine beliebige nichtleere Menge. Zeige: $\mathrm{Abb}(X, V)$ ist ein K-Vektorraum (zusammen mit der punktweisen Addition und der durch $(cf)(x) = cf(x)$ für $c \in K$, $f \in \mathrm{Abb}(X, V)$ gegebenen Skalarmultiplikation).
(b) Zeige: Ist R ein kommutativer Ring mit Multiplikation $\cdot_R$ und ein Teilring $K \subseteq R$ von R ein Körper, so wird R zu einem K-Vektorraum, indem man die Skalarmultiplikation $\cdot : K \times R \to R$ durch $c \cdot r = c \cdot_R r$ für alle $c \in K$, $r \in R$ definiert.

Aufgabe 18: Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ zusammen mit der punktweisen Addition, aufgefaßt als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Bestimme in jedem der folgenden Fälle den von X aufgespannten Unterraum.
(a) $X = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x f(-x) = f(x)\}$
(b) $X = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x f(-x) = -f(x)\}$
(c) $X = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x f(-x) = f(x)\} \cup \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x f(-x) = -f(x)\}$
(d) $X = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) = 0\}$
(e) $X = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) \neq 0\}$

Aufgabe 19: Entscheide für jedes der folgenden Paare (K, V) aus einem Körper K und einer abelschen Gruppe V, ob eine Abbildung $\cdot : K \times V \to V$ derart existiert, dass V mit $\cdot$ als Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum wird. Beweise deine Antworten.
(a) $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $V = (\mathbb{Q}, +)$
(b) $K = \mathbb{Q}$, $V \neq \{0\}$ endlich
(c) $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $V = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
(d) $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
(e) $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $V = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times$.

Aufgabe 20: Für einen Körper K und einen K-Vektorraum V sowie $X \subseteq V$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_{lu}(X)$ die 'linear unabhängige Potenzmenge' von X, d.h. die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von X.
(a) Es sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Bestimme $\mathfrak{P}_{lu}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2)$.
(b) Es sei $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^3$, $X = \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), (1,1,1)\}$. Bestimme $\mathfrak{P}_{lu}(X)$.
(c) Es sei K ein endlicher Körper. Betrachte K als K-Vektorraum. Zeige: Für $X \subseteq K$ ist $|\mathfrak{P}_{lu}(X)| - |X| \in \{0, 1\}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und V ein K-Vektorraum, ferner $\{v_1, ..., v_{2014}\} \subseteq V$ so, dass $\Sigma_{i=1}^{2014}(1-\delta_{ij})v_i = 0$ für alle $j \in \{1, 2, ..., 2014\}$.
(a) Zeige, dass $v_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, ..., 2014\}$.
(b) Gilt die Folgerung weiterhin, wenn die Voraussetzung über die Charakteristik von K fortgelassen wird? Beweise deine Antwort.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 01.12.2014, 9.55. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.