Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 21: Entscheide für jede der folgenden Wahlen eines Körpers K, eines K-Vektorraumes V und einer Familie F von Elementen von V, ob F eine Basis von V ist. Bestimme außerdem die Dimension von V (hat V keine endliche Basis, so genügt die Angabe, dass V unendlichdimensional ist). Beweise deine Antworten.
(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $F = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,0))$
(b) $K = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, $V = (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^4$, $F = ((2,3,4,5),(-1,-1,1,6),(-2,3,-2,3),(12,5,3,1))$
(c) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}[X]$, $F = (X^k + X^{k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$
(d) $K = \mathbb{R}$, $V = \{\Sigma_{i=0}^{10} c_i X^i \in \mathbb{R}[X] : c_i = 0 \text{ für } i \text{ gerade}\}$,
$F = (X + X^3 + X^5 + X^7 + X^9, X + X^3 + X^5 + X^7, X + X^3 + X^5, X + X^3, X)$
(e) $K = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $V = \mathrm{Abb}(\{1,2,...,n\},\mathbb{R})$, $F = (f_i)_{1\leq i\leq n}$, wobei für $i \in \{1,2,...,n\}$ die Funktion $f_i \in \mathrm{Abb}(\{1,2,...,n\},\mathbb{R})$ gegeben ist durch $f_i(i) = 1$ und $f_i(j) = 0$ für $j \in \{1,2,...,n\} \setminus \{i\}$.
(f) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = (f_x)_{x\in\mathbb{R}}$, wobei für $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_x \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ durch $f_x(x) = 1$, $f_x(y) = 0$ für $y \neq x$ gegeben ist.

Aufgabe 22: Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$.
(a) Beweise oder widerlege: Sind $(x_1,...,x_{n_1})$ und $(y_1,...,y_{n_2})$ linear unabhängige Familien von Elementen V mit $n_1 + n_2 = n$ und $\{x_1,...,x_{n_1}\} \cap \{y_1,...,y_{n_2}\} = \emptyset$, so ist $\{x_1,...,x_{n_1},y_1,...,y_{n_2}\}$ eine Basis von V.
(b) Eine Folge $(U_1,...,U_m)$ von Unterräumen von V heißt 'Turm von Unterräumen der Höhe m', falls $\{0\} \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq ... \subsetneq U_m$. Zeige: Die maximale Höhe eines Turmes von Unterräumen von V ist gleich der Dimension von V.

Aufgabe 23: Für $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sagen wir g sei von höherer Größenordnung als f, geschrieben $f \ll g$, falls zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $d \in \mathbb{R}$ so existiert, dass $g(x) > cf(x)$ für alle $x > d$. Wir betrachten nun $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gemäß Aufgabe 17(a) als $\mathbb{R}$-Vektorraum.
(a) Zeige: Sind $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}_{>0})$ mit $f \ll g$, so ist (f, g) linear unabhängig.
(b) Zeige: Sind $f_1,...,f_n \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}_{>0})$ mit $f_1 \ll f_2 \ll ... \ll f_n$, so ist $(f_1,...,f_n)$ linear unabhängig.
(c) Zeige: Ist $\{f_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}_{>0})$ mit $f_i \ll f_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$, so ist $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig.

Aufgabe 24: Es sei k ein endlicher Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$.
(a) Wie viele Elemente hat V?
(b) Wie viele Basen der Form $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ hat V? (Zwei Basen $(v_1,...,v_n)$, $(w_1,...,w_n)$ dieser Form gelten als gleich, wenn $v_i = w_i$ für alle $i \in \{1,2,...,n\}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei K ein endlicher Körper, $|K| = k$, $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler Vektorraum über K und $d \leq n$.
(a) Bestimme die Anzahl der d-dimensionalen Untervektorräume von V. Beweise deine Antwort.
(b) Bestimme die Anzahl aller Untervektorräume von V. Beweise deine Antwort.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 08.12.2014, 9.55. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.