Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Arno Fehm, Dr. Merlin Carl

WS 14/15
08.12.2014
Zettel 7

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 25:
(a) Es sei $V = \mathbb{R}^5$ aufgefaßt als $\mathbb{R}$-Vektorraum, $U = \text{span}((1,1,0,0,0),(1,2,0,0,0))$, $W = \text{span}((0,1,2,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1),(0,0,1,1,0)$. Bestimme $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W)$.
(b) Es sei $V = \mathbb{R}[X]$ aufgefaßt als $\mathbb{R}$-Vektorraum, $U = \{\Sigma_{i=0}^{6} a_i X^i \in V : \forall i \in \mathbb{N} a_{2i-1} = 0\}$ und $W = \{\Sigma_{i=0}^{6} a_i X^i \in V : \forall i \in \mathbb{N} a_{3i-1} = 0 \wedge a_{3i-2} = 0\}$. Bestimme $\dim_{\mathbb{R}}(U + W)$.
(c) Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, W und U Untervektorräume von V mit $\dim(U) + \dim(W) = n$ und $U \cap W = \{0\}$. Zeige: $U + W = V$

Aufgabe 26:
(a) Es sei K ein beliebiger Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in K^{n \times n}$. Zeige: $(AB)^t = B^t A^t$.
(b) Bestimme alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die mit allen anderen reellen 2×2-Matrizen kommutieren, d.h. so, dass $AB = BA$ für alle $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte:
(a) Es seien $a, n \in \mathbb{N}$. Zeige: $V_{a,n} := \{\Sigma_{i=0}^{n-1} q_i \sqrt[n]{a^i} : q_0, ..., q_{n-1} \in \mathbb{Q}\}$ ist Untervektorraum des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{R}$ mit $\dim(V_{a,n}) \leq n$.
(b) Finde ein Beispiel für $a, n \in \mathbb{N}$ mit $\dim_{\mathbb{Q}}(V_{a,n}) = n$ und ein Beispiel für $a, n \in \mathbb{N}$ mit $\dim_{\mathbb{Q}}(V_{a,n}) < n$.
(c) Zeige: Es existiert ein Polynom $q \in \mathbb{Q}[X]$ mit $q \neq 0$ so, dass $q(\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{4} + 7) = 0$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 15.12.2014, 9.55. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.