Fachbereich Mathematik und Statistik der Universität Konstanz
Prof. Dr. Arno Fehm, Dr. Merlin Carl

WS 14/15
15.12.2014
Zettel 8

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 27: Entscheide in jedem der folgenden Fälle, ob $f : G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus, Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus von Gruppen oder nichts davon ist. Beweise deine Antworten.
(a) $G_1 = \mathbb{Q}$, $G_2 = \mathbb{R}$, $f(x) = cx$, $c \in \mathbb{Q}^\times$
(b) $G_1 = G_2 = \mathbb{Q}$, $f(x) = x + 1$
(c) $G_1 = G_2 = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
(d) $G_1 = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^{3\times 3}$, $G_2 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $f(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}) = d$.
(e) $G_1 = G_2 = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})$, $f(A) = A^{-1}$.

Aufgabe 28: Bestimme für jede der folgenden Wahlen zweier Gruppen G_1, G_2 und eines Gruppenhomomorphismus $f : G_1 \to G_2$ den Kern von f. Beweise deine Antworten.
(a) $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $f(x) = 4x$
(b) $G_1 = \mathbb{R}^4$, $G_2 = \mathbb{R}^3$, $f(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c+a \end{pmatrix}$
(c) $G_1 = \mathbb{C}^\times$, $G_2 = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
(d) $G_1 = \mathbb{R}[X]$, $G_2 = \mathbb{R}$, $f(p) = p(3)$
(e) $G_1 = \mathbb{Z}$, $G_2 = \mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$, $f(z) = \{14k + z : k \in \mathbb{Z}\}$

Aufgabe 29: Welche der folgenden Gruppen sind zueinander isomorph? Beweise deine Antworten.
(a) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
(b) S_n und $\mathbb{Z}/n!\mathbb{Z}$ für $n \geq 3$
(c) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$
(d) $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$
(e) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ und $\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$, wobei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Aufgabe 30: Es sei $(G, *)$ eine endliche (nicht notwendigerweise abelsche) Gruppe mit n Elementen, ferner S_n die Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, ..., n\}$ zusammen mit der Komposition $\circ$ als Verknüpfung. Der Einfachheit halber seien die Elemente von G mit $1, 2, 3, ..., n$ bezeichnet.
(a) Zeige: Für $i \in G$ ist die Abbildung $\pi_i : G \to G$, $x \mapsto i * x$ eine Permutation von G.
(b) Zeige: Die Abbildung $f : G \to S_n$, $j \mapsto \pi_j$ ist ein Gruppenmonomorphismus.
(c) Zeige: Zu jeder endlichen Gruppe G mit n Elementen existiert eine Untergruppe G' von S_n, die zu G isomorph ist.
(d) Zeige: Ist n prim, so ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zu keiner Untergruppe von S_{n-1} isomorph.
(e) Zeige: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist zu einer Untergruppe von S_5 isomorph.

Zusatzaufgabe für kulinarisch Interessierte: Es sei
$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, $v = \begin{pmatrix} -77\frac{1}{2} \\ 205 \\ 92\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1}v$. Ferner sei d die Anzahl $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = 0$, $3e$ die Dimension des durch die Spalten von A aufgespannten Unterraumes von $\mathbb{R}^3$ und f die Anzahl der Paare (p_1, p_2), wobei p_1 und p_2 Primzahlen sind und $p_1 + 1 = p_2$.
Gib nun b Gramm Butter, e Eier, c Gramm Zucker und f Päckchen Vanillinzucker mit d EL Wasser in eine Schüssel und schlage das Gemisch schaumig. Füge dabei a Gramm Mehl hinzu. Rolle den Teig glatt aus, stich Formen heraus und backe sie im vorgeheizten Backofen bei ca. 150 Grad zwischen 10 und 14 Minuten lang. Koste das Ergebnis.
(Die Punkte gibt es, wenn Du frische, nach diesem Rezept hergestellte Plätzchen ins erste Tutorium nach der Vorlesungspause mitbringst.)

Weitere Aufgaben

Aufgabe I: Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension n. Zeige: Durch Einschränkung der Skalarmultiplikation wird V zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $2n$. Formuliere einen allgemeineren Satz und beweise ihn.

Aufgabe II:
(a) Zeige: Ist 1 die größte natürliche Zahl, die jedes Element der endlichen Menge $\{m_1, ..., m_k\} \subseteq \mathbb{N}$ teilt, so existieren $b_1, ..., b_k \in \mathbb{Z}$ mit $\Sigma_{i=1}^k b_i m_i = 1$.
(b) Zeige: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Menge $M \subseteq \mathbb{Z}$ mit $|M| = n$ so, dass $\langle M\rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, aber $\langle M'\rangle_{\mathbb{Z}} \neq \mathbb{Z}$ für jedes $M' \subsetneq M$.
(c) Zeige: Ist $M \subseteq \mathbb{Z}$ unendlich mit $\langle M\rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, so existiert eine endliche Teilmenge $X \subseteq M$ so, dass $\langle X\rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

Aufgabe III: Es sei R ein Ring mit Einselement und höchstens $k \in \mathbb{N}$ Nullteilern. Zeige: Ist die Charakteristik c von R von 0 verschieden, so hat sie höchstens k verschiedene Primfaktoren.

Aufgabe IV:
(a) Es seien $r, s \in \mathbb{N}$, $p = \Sigma_{i=0}^{r} a_i X^i$ und $q = \Sigma_{j=0}^{s} b_j X^j$ Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{N}_0$ und $pq = \Sigma_{k=0}^{r+s} X^k$. Zeige: $\{a_0, ..., a_r, b_0, ..., b_s\} \subseteq \{0, 1\}$. Finde Polynome p, q wie oben angegeben mit $r > 1$ und $s > 1$.
(b) Zeige: Zu $m \in \mathbb{N}$ existieren genau dann $r, s \in \mathbb{N}$ und nichtkonstante Polynome $p = \Sigma_{i=0}^{r} a_i X^i$, $q = \Sigma_{j=0}^{s} b_j X^j$ mit $\deg(p) = r$, $\deg(q) = s$, Koeffizienten in $\mathbb{N}_0$ und $pq = \Sigma_{k=0}^{m} X^k$, wenn $m + 1$ keine Primzahl ist.

Aufgabe V: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimme alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $AA^t = 0$. Formuliere eine allgemeinere Behauptung und beweise sie.

Aufgabe VI: Es sei V eine abelsche Gruppe. Zeige: Es gibt höchstens eine Abbildung $\cdot : \mathbb{Q} \times V \to V$ so, dass V zusammen mit $\cdot$ als Skalarmultiplikation ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum wird. Finde ein V so, dass keine solche Abbildung existiert.

Aufgabe VII:
(a) Es seien K_1, K_2 Körper und $\cdot : K_1 \times K_2 \to K_2$ eine Abbildung so, dass $(K_2, +)$ durch $\cdot$ als Skalarmultiplikation ein K_1-Vektorraum wird. Zeige: $\mathrm{char}(K_1) = \mathrm{char}(K_2)$.
(b) Gibt es einen Körper K und eine Abbildung $\cdot : K \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ so, dass $(\mathbb{Z}, +)$ durch $\cdot$ zu einem K-Vektorraum wird? Beweise deine Antwort.

FROHE WEIHNACHTEN!

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Als volle Punktzahl werden bei diesem Zettel, wie üblich, 40 Punkte gewertet. Die ‘weiteren Aufgaben’ gehen mit insgesamt maximal 40 Punkten in die Wertung ein. Die maximal erreichbare Punktzahl bei diesem Zettel ist also 90 von 40.
Abgabe bis zum 12.01.2015, 9.55. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.