Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 31: Entscheide für jede der folgenden Wahlen von K, V, W und $f : V \to W$, ob f ein Homo-, Mono-, Epi- oder Isomorphismus von K-Vektorräumen oder nichts davon ist.
(a) $K = \mathbb{Q}$, $V = W = \mathbb{Q}^4$, $f(\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}^t) = \begin{pmatrix} a+1 & b+1 & c+1 & d+1 \end{pmatrix}^t$
(b) $K = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}$, $f(A) = \Sigma_{i=1}^n A_{ii}$.
(c) $K = \mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$, $V = (\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})^3$, $W = (\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})^4$, $f(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 0 & 2 & 4 \\ 10 & 13 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
(d) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $W = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $f(a+ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
(e) $K = \mathbb{C}$, $V = \{(a,0,b)^t : a, b \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^3$, $W = \mathbb{C}^2$, $f((a,0,b)^t) = (a,0)^t$.

Aufgabe 32: Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum.
(a) Zeige: Ist $|V| > 1$, so ist $\mathrm{Abb}(V,V)$ - mit komponentenweiser Addition und Komposition von Abbildungen als Multiplikation - kein Ring.
(b) Beweise oder widerlege: $\mathrm{Aut}_K(V)$ ist für jeden K-Vektorraum V ein Unterring von $\mathrm{End}_K(V)$.

Aufgabe 33: Ist G eine Gruppe und $f : G \to G$ ein Homomorphismus, so heißt f ein Endomorphismus von G; ist f außerdem bijektiv, so heißt f ein Automorphismus von G. Die Menge der Automorphismen von G bezeichnen wir $\mathrm{Aut}(G)$.
(a) Zeige: Ist G eine Gruppe, so bildet $\mathrm{Aut}(G)$ (zusammen mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung) ebenfalls eine Gruppe.
(b) Zeige: Sind G und H Gruppen mit $G \cong H$, so ist auch $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(H)$ (mit der Verknüpfung aus (a)).
(c) Zeige: Ist K ein Körper und sind V und W K-Vektorräume mit $V \cong W$, so ist $\mathrm{End}_K(V) \cong \mathrm{End}_K(W)$ (jeweils aufgefaßt als K-Vektorräume).
(d) Zeige: Ist K ein Körper und sind V, V', W, W' K-Vektorräume mit $V \cong V'$ und $W \cong W'$, so ist $\mathrm{Hom}_K(V,W) \cong \mathrm{Hom}_K(V',W')$ (jeweils aufgefaßt als K-Vektorräume).

Aufgabe 34:
(a) Wie viele Automorphismen hat $\mathbb{Q}$ als additive Gruppe, wie viele als Ring? Beweise deine Antworten.
(b) Es sei p eine Primzahl. Wie viele Automorphismen hat $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ als additive Gruppe bzw. als Ring? Beweise deine Antworten.
(c) Es sei p eine Primzahl. Wie viele Automorphismen hat $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ als additive Gruppe bzw. als Ring? Beweise deine Antworten.
(d) Es sei K ein endlicher Körper mit k Elementen, ferner $m, n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und W ein m-dimensionaler K-Vektorraum. Bestimme $|\mathrm{Hom}_K(V,W)|$. Beweise deine Antwort.

Zusatzaufgabe für Interessierte: (a) Es seien $(G, +_G)$ und $(H, +_H)$ abelsche Gruppen, ferner $\sigma : G \to H$ und $\tau : H \to G$ Homomorphismen. Folgt dann, dass G und H isomorph sind? Beweise Deine Antwort. (2 Punkte)
(b) Es seien $(G, +_G)$ und $(H, +_H)$ abelsche Gruppen, ferner $\sigma : G \to H$ und $\tau : H \to G$ Monomorphismen. Folgt dann, dass G und H isomorph sind? Beweise Deine Antwort. (6 Punkte)
(c) Es sei K ein Körper, V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, ferner $\sigma : V \to W$ und $\tau : W \to V$ Monomorphismen. Folgt dann, dass V und W isomorph sind? Beweise deine Antwort. (2 Punkte)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 19.01.2015, 9.55. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.