Winke zur Lösungssuche - Zettel 2

Merlin Carl

Die folgenden Hinweise und Fragen sind keine Lösungen, auch keine teilweisen Lösungen, sondern Hinweise darauf, wie man an die Aufgabe herangehen kann und Winke in die Richtung, in der die Lösung vielleicht zu finden ist. Sie sollen außerdem dabei helfen, hinter speziellen Lösungen Lösungsprinzipien zu entdecken, die sich allgemeiner anwenden lassen.

Aufgabe 5

Die vorletzte Aussage in Teil (b) macht vielleicht Schwierigkeiten. *Du mußt die Aufgabe verstehen.* Worum geht es hier eigentlich? Wie sehen Elemente von A aus? Kannst du Beispiele angeben? Gefragt ist, ob A eine Untergruppe ist. *Gehe auf die Definition zurück.* Was heißt Untergruppe? Ist $A := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q} \text{ und } (a, b) \neq (0, 0)\}$ unter Inversen abgeschlossen? *Gehe auf die Definition zurück.* Was heißt 'Inverses'? Was heißt es in diesem Fall? $\frac{1}{a+b\sqrt{2}}$ ist ein Inverses, aber liegt es auch immer in A? Existiert es überhaupt für alle a und b? Was könnte vielleicht ein Problem mit der Existenz sein? Ist es eines? Wir wollen sehen, ob $\frac{1}{a+\sqrt{2}b} \in A$ für $a + \sqrt{2}b \in A$. *Gehe auf die Definition zurück.* Was heißt es genau, dass das Inverse von $a + \sqrt{2}b$ in A liegt? Wie sehen Elemente von A aus? *Mache die Situation so konkret wie möglich. Führe geeignete Bezeichnungen ein. Stelle eine Gleichung auf.*

Aufgabe 7

(a) *Du mußt die Aufgabe verstehen.* Was heißt es, dass ein Produkt vollständig geklammert ist? Kannst du Beispiele angeben? Gegenbeispiele? Kannst du anhand der Definition sehen, dass es sich wirklich um Beispiele und Gegenbeispiele handelt? Die Menge der vollständig geklammerten Produkte über $(x_1, ..., x_n)$ ist ziemlich unübersichtlich, mit wachsendem n immer mehr. Wie kann man etwas darüber zeigen? Welche Beweismethoden hast du bisher kennengelernt? Welche davon scheinen sich am ehesten zu eignen? Die Aufgabe enthält einen natürlichzahligen Parameter, n. Welche Beweismethode legt das nahe? Direkt zu zeigen, dass zwei beliebige voll-

ständig geklammerte Produkte über $(x_1, ..., x_n)$ stets einander gleich sind, könnte unübersichtlich sein. Aber vielleicht gibt es eine 'übersichtlichere' Aussage, aus der das Gewünschte folgt? Es würde ausreichen, zu zeigen, dass alle vollständig geklammerten Produkte über $(x_1, ..., x_n)$ gleich einem bestimmten davon sind. Welches wäre als dieses 'bestimmte' geeignet? *Betrachte geeignete Spezialfälle.* Mit beliebigem n ist die Situation unanschaulich. Vielleicht hilft es, einige konkrete Werte für n einzusetzen und die Situation dann zu untersuchen? Welches n wäre geeignet? Ist n zu groß (etwa $n = 10$), wird man die Übersicht verlieren. Ist n zu klein (etwa $n = 2$), ist die Aufgabe zwar einfach, aber man lernt auch nicht viel daraus.
(b) *Kennst du eine ähnliche Aufgabe?* Sicher, (a). *Wenn du eine ähnliche Aufgabe kennst, läßt sich die Lösungsidee auf die neue Situation anpassen?*

Aufgabe 8

(a) Eine Aussage der Form 'Ein in gewisser Weise neutrales Element ist gleich einem anderen, auch in gewisser Weise neutralem Element'. *Kennst Du eine ähnliche Aussage?* (Z.B. aus der Vorlesung?) Wie funktionierte der Beweis? *Wenn du eine ähnliche Aussage kennst, läßt sich der Beweis auf die neue Situation anpassen?*
(b) Eine Aussage der Form 'Ein in gewisser Weise zu x inverses Element ist gleich einem anderen, auch in gewisser Weise zu x inversem Element'. *Kennst Du eine ähnliche Aussage?* (Z.B. aus der Vorlesung?) Wie funktionierte der Beweis? *Wenn du eine ähnliche Aussage kennst, läßt sich der Beweis auf die neue Situation anpassen?*

Zusatzaufgabe

(a) Der Term $ab + ba$ steht etwas isoliert herum. *Was ist gegeben? Versuche, die Daten zu verbinden.* Irgendwie müssen die Bedingung '$x^2 = 0$ für alle x' und der Term $ab + ba$ zusammengebracht werden. Was hat $ab + ba$ mit einem Quadrat zu tun? Kennst du einen ähnlichen Term, der etwas mit einem Quadrat zu tun hat? Vielleicht hilft es, den Term geeignet zu ergänzen?
(b) *Betrachte die Bedingung. Kennst du eine hilfreiche Aussage, die aus der Bedingung folgt?* Teil (a) hat uns etwas wichtiges über Produkte in R gezeigt. Wie läßt sich die Aussage aus (a) hier einsetzen? Vielleicht gibt es eine äquivalente Formulierung von (a), die die Anwendbarkeit besser sehen läßt?