Winke zur Lösungssuche - Zettel 3

Merlin Carl

Die folgenden Hinweise und Fragen sind keine Lösungen, auch keine teilweisen Lösungen, sondern Hinweise darauf, wie man an die Aufgabe herangehen kann und Winke in die Richtung, in der die Lösung vielleicht zu finden ist. Sie sollen außerdem dabei helfen, hinter speziellen Lösungen Lösungsprinzipien zu entdecken, die sich allgemeiner anwenden lassen.

Aufgabe 10

Du musst die Aufgabe verstehen. Wie sehen die Polynome p_n und q_n für verschiedene Werte von n aus? Kannst du Beispiele angeben? *Betrachte Spezialfälle.* Setze einige geeignete Werte für n ein. Was sagt die Behauptung in diesen Spezialfällen? Überprüfe die Behauptung in diesen Spezialfällen. Versuche, ein allgemeines Muster zu erkennen. Wenn das geklappt hat, gehe zurück zum allgemeinen Fall. Die Behauptung hängt von einer natürlichen Zahl n ab. Welches Beweisverfahren kennst du für Behauptungen dieser Art?

Aufgabe 12

(b) *Von mehreren äquivalenten Formulierungen einer Aussage ist oft diejenige am zugänglichsten, aus der sich die meisten konkreten Daten ergeben.* Die Folgerung 'n ist Primzahl' sagt also 'n hat keine Teiler außer 1 und n'. Die Bedingung 'R hat keine Nullteiler' ist ebenfalls negativ. Vielleicht ist es hilfreicher, eine logisch äquivalente Aussage zu betrachten, in der mehr Existenz und weniger Nichtexistenz behauptet wird? Arbeitet man in einem Ring mit Einselement und Charakteristik n, so ist die Aussage von der Form $\neg A \to \neg B$ - vielleicht hilft die Aussagenlogik weiter? *Mache die Situation so konkret wie möglich. Führe geeignete Bezeichnungen ein.* Wenn die Existenz von etwas gegeben ist, fixiere ein Objekt mit den behaupteten Eigenschaften und gib ihm einen Namen - so kannst du es weiter verwenden.

Zusatzaufgabe

(a) *Kennst du eine ähnliche Aussage?* (Z.B. aus der Vorlesung?) *Wenn du eine ähnliche Aussage kennst, betrachte den Beweis. Kannst du ihn auf den neuen Fall anpassen? Führe geeignete Hilfsgrößen ein. Betrachte interessante Spezialfälle:* Zu je zwei Elementen x, y existiert ein z mit $x * z = y$. Für welche Paare (x, y) könnte das sich ergebende z von besonderem Interesse sein?

(b) Die Voraussetzung 'kein Körper' sieht wenig hilfreich aus, die Folgerung 'unendlich' ebenfalls schwer zugänglich. Vielleicht hilft es, stattdessen eine logisch äquivalente Aussage zu betrachten? Die Aussage ist von der Form $\neg A \to \neg B$ - vielleicht hilft die Aussagenlogik weiter? *Du musst die Aufgabe verstehen. Gehe auf die Definition zurück. Was ist gegeben? Was ist gesucht?* R ist ein kommutativer Ring. Was fehlt, damit R ein Körper ist? *Kennst du eine Aussage mit der gleichen oder einer ähnlichen Folgerung? Kannst du sie verwenden?*