

Winke zur Lösungssuche - Zettel 4

Merlin Carl

Die folgenden Hinweise und Fragen sind keine Lösungen, auch keine teilweisen Lösungen, sondern Hinweise darauf, wie man an die Aufgabe herangehen kann und Winke in die Richtung, in der die Lösung vielleicht zu finden ist. Sie sollen außerdem dabei helfen, hinter speziellen Lösungen Lösungsprinzipien zu entdecken, die sich allgemeiner anwenden lassen.

Aufgabe 13

(b),(c),(d) *Betrachte geeignete Spezialfälle. Versuche, ein Muster zu erkennen.* Ist ein Muster erkannt, muss es bewiesen werden. Die Behauptung hängt von einer natürlichen Zahl n ab. Welches Beweisverfahren bietet sich für solche Behauptungen an?

Aufgabe 15

Du musst die Aufgabe verstehen. Was heißt es, dass ein $a \in \mathbb{Z}/4^n\mathbb{Z}$ eine Nullstelle des Polynoms X^2 ist? *Gehe auf die Definition zurück.* Was ist die 0 in $\mathbb{Z}/4^n\mathbb{Z}$? Kannst du eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, wann a eine Nullstelle von X^2 ist? Mit der richtigen Bedingung wird es leicht, sie zu zählen.

Aufgabe 16

(a) *Was ist gegeben?* Ein Polynom f mit vier paarweise verschiedenen Nullstellen. *Mache die Daten so konkret wie möglich. Führe geeignete Bezeichnungen ein.* Wir haben ein Polynom und wir haben Nullstellen. *Kannst du etwas Nützliches aus den Annahmen ableiten? Kennst du einen Satz, der in dieser Situation anwendbar ist?* Nicht direkt: Die Sätze zu Polynomen aus der Vorlesung sind für Körper formuliert, und \mathbb{Z} ist kein Körper. Der folgende Satz ist vielleicht hilfreich: Das Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ habe eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{Z}$; dann existiert ein Polynom $g \in \mathbb{Z}[X]$ mit $f(X) = (X - \lambda)g(X)$. *Kannst du diesen Satz beweisen? Kennst du eine ähnliche Behauptung? Wenn du eine ähnliche Behauptung kennst, kannst du ihren Beweis so anpassen, dass er auf die fragliche Behauptung paßt? Wohin führt es, wenn er angewendet wird? Betrachte Varianten der Aufgabe.* Rechts steht eine Zahl, 5. Sicherlich können wir sie nicht durch eine beliebige andere ganze Zahl ersetzen, ohne die Aussage falsch zu machen - irgendwelche Werte wird das Polynom ja annehmen. Welche Eigenschaften der 5 könnten hier erheblich sein? (b) *Kennst du eine ähnliche Aufgabe? Wenn du eine ähnliche Aufgabe kennst, kannst du die gegebene auf sie zurückführen?* Kannst du das gegebene Polynom so modifizieren, dass die Voraussetzung aus (a) zutrifft und so, dass die Folgerung aus (a) sich dabei in eine Behauptung über das neue Polynom übersetzt?