

Winke zur Lösungssuche - Zettel 5

Merlin Carl

Die folgenden Hinweise und Fragen sind keine Lösungen, auch keine teilweisen Lösungen, sondern Hinweise darauf, wie man an die Aufgabe herangehen kann und Winke in die Richtung, in der die Lösung vielleicht zu finden ist. Sie sollen außerdem dabei helfen, hinter speziellen Lösungen Lösungsprinzipien zu entdecken, die sich allgemeiner anwenden lassen.

Aufgabe 18

(c) macht vielleicht Schwierigkeiten. *Du mußt die Aufgabe verstehen.* Was ist der ‘aufgespannte Unterraum’? *Gehe auf die Definition zurück.* Gut, aber die Definition scheint hier nicht viel zu helfen: Wir scheinen wenig Aussichten zu haben, den ‘kleinsten Untervektorraum von V , der X enthält’ direkt zu finden. Gibt es vielleicht eine alternative Charakterisierung, die die Aufgabe zugänglicher macht? Sicher, Satz 2.4. Linearkombinationen von Funktionen zu betrachten gibt zumindest einen Ansatz. Wir haben eine neue Frage: Welche Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind darstellbar als Linearkombination von Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = g(-x)$ und Funktionen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = -h(-x)$? Beliebige Linearkombinationen sind aber noch immer etwas unübersichtlich. Vielleicht geben die Lösungen von (a) und (b) einen Wink, wie der Suchraum eingeschränkt werden kann? So oder so: *Betrachte zunächst eine einfachere Aufgabe. Betrachte geeignete Spezialfälle.* Linearkombinationen mit nur einem von 0 verschiedenen Koeffizienten zu betrachten wird nicht sehr lehrreich sein; wenn alle von 0 verschiedenen Koeffizienten vor Funktionen der gleichen Art ($g(x) = g(-x)$ oder $g(x) = -g(-x)$) stehen, sind wir in den schon bearbeiteten Fällen (a) und (b). Der einfachste Spezialfall, der etwas über die Aufgabe zu sagen haben könnte, ist dann wohl der einer Linearkombination aus einer Funktion der einen und einer Funktion der anderen Art. Wir haben also eine neue Frage: Welche Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind darstellbar in der Form $f(x) = ag(x) + bh(x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $\forall x g(x) = g(-x)$, $\forall x h(x) = -h(-x)$? *Versuche, die Bedingung mit dem Gesuchten möglichst eng in Beziehung zu bringen.* In der Bedingung kom-

men x und $-x$ stets gemeinsam vor, unser Ansatz sollte das berücksichtigen. *Stelle eine Gleichung auf.*

Aufgabe 19

(a) *Versuche, die Aufgabe als gelöst anzunehmen und Eigenschaften der Lösung abzulesen.* Angenommen, $\cdot : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ist eine solche Abbildung. Wie muß \cdot dann aussehen? $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat nur zwei Elemente, 0 und 1. Was wird für $q \in \mathbb{Q}$ denn $0 \cdot q$ und $1 \cdot q$ sein müssen, wenn \cdot eine Skalarmultiplikation sein soll? *Gehe auf die Definition zurück!* Welche Eigenschaften muß eine Skalarmultiplikation haben? Hilft eine davon, \cdot zumindest teilweise festzulegen? *Betrachte die Voraussetzung!* Kennst du einen Satz (z.B. aus der Vorlesung), mit gleichen oder ähnlichen Voraussetzungen? Tatsächlich ergibt sich auf diese Weise, dass es nur einen einzigen Kandidaten für \cdot gibt. Handelt es sich dabei auch tatsächlich um eine Skalarmultiplikation? *Gehe auf die Definition zurück.* Welche Eigenschaften sind noch zu überprüfen? Sind sie erfüllt?

(b) K ist sehr konkret gegeben, aber die Voraussetzung über V ist noch sehr allgemein. *Betrachte geeignete Spezialfälle.* Setze z.B. für G in der Frage $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ein, versuche, sie für diese Spezialfälle zu beantworten. Auch die Spezialfälle sind vielleicht noch nicht ganz einfach. *Kennst du eine ähnliche Aufgabe?* Sicher, (a). *Wenn du eine ähnliche Aufgabe kennst, kannst du den Lösungsweg so anpassen, dass er bei der neuen Aufgabe hilft?* Wenn einige Spezialfälle gelöst sind, sollte es wieder um die allgemeine Frage gehen. *suche nach Mustern* Ist die Antwort in allen betrachteten Spezialfällen, wie die Aufgabenstellung es nahelegt, die gleiche? Was ist jeweils der Grund? Gibt es eine Ähnlichkeit zwischen den Gründen für die Spezialfälle? Läßt sie sich auf den allgemeinen Fall übertragen?

(c) *Kennst du eine ähnliche Aufgabe?* Sicher, (a) und (b). *Wenn du eine ähnliche Aufgabe kennst, kannst du den Lösungsweg so anpassen, dass er bei der neuen Aufgabe hilft?* Welche der Aufgaben (a) und (b) hat ggf. größere Aussichten, etwas Hilfreiches beizutragen? Warum?

(d) *Kennst du eine ähnliche Aufgabe?* Sicher, (a) und (b). *Wenn du eine ähnliche Aufgabe kennst, kannst du den Lösungsweg so anpassen, dass er bei der neuen Aufgabe hilft?* Welche der Aufgaben (a) und (b) hat ggf. größere Aussichten, etwas Hilfreiches beizutragen? Warum?

Aufgabe 20

(c) *Betrachte geeignete Spezialfälle.* Setze für K einige der endlichen Körper ein, die du schon kennst. Bestimme jeweils für einige Teilmengen X explizit $\mathfrak{P}_{lu}(X)$. *Suche nach Mustern.* Wie hängt X mit $\mathfrak{P}_{lu}(X)$ zusammen? Wenn

du ein Muster erkannt hast, wie hängt es mit der zu beweisenden Aussage zusammen? *Manchmal ist es leichter, eine stärkere Aussage zu beweisen. Kannst du eine stärkere Aussage beweisen?*