

Übungsblatt 1 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1:

- (a) Welche der folgenden Ausdrücke definieren keine Mengen und warum nicht?
- (b) Welche der definierten Mengen ist Teilmenge von welchen anderen? Welche der definierten Mengen ist Element von welchen anderen? Dabei bezeichne A_i die durch den Ausdruck in (i) definierte Menge, falls dieser Ausdruck eine Menge definiert.
- (c) Welche der definierten Mengen sind gleich?
- (d) Wieviele Elemente haben die jeweiligen Mengen?
- (1) $\{x \geq x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
- (2) $\{x \in \{1, 2, 3\} \mid 0 \leq 1\}$
- (3) $\{x \in \{1, 2, 3\} \mid 1 \leq 0\}$
- (4) $\{1, 2\}$
- (5) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- (6) $\{13 \leq 14\}$
- (7) $\{\{x, \{y\}\} \mid x \in \{1, 3\}, y \in \{2, x\}\}$
- (8) $\{\{\{\{\{\{\{\{\emptyset, \emptyset, \{\}\}\}\}\}\}\}\}\} \mid x \in \emptyset\}$
- (9) $\{x \in \emptyset \mid x = \emptyset\}$
- (10) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$
- (11) $\{\}\{\}\{\}\{\}\{\}\{\}\{\}\{\}$
- (12) $\}}\}}{\{\{\{\}$
- (13) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 > 0\}$
- (14) $\{x \subseteq \{1, 2, 3\} \mid \#x = 2\}$
- (15) $\{7 \mid 2 \geq 3\}$
- (16) $\{7 \mid 2 \geq x\}$

Aufgabe 2: Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Begründe jeweils Deine Aussage.

- (a) $\forall x : \exists y : (y \neq \emptyset \implies x \neq x)$
- (b) $\forall x : \exists y : (y \neq \emptyset \ \& \ x \subset y)$
- (c) $\exists x \in \{0, 1\} : \forall y \in \{0, 1\} : \exists z \in \{0, 1\} : (y \neq x \implies y \neq z)$
- (d) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : y > x$
- (e) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : y > x$

Aufgabe 3: Finde explizite Darstellungen für folgende Mengen:

- (a) $(\{\text{Birne, Elefant, Eiffelturm}\} \cup \{1, 2, \dots, 500\}) \cap (\{x \mid x \text{ Säugetier}\} \cup \{x \mid x \text{ Kubikzahl}\})$
- (b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$
- (c) $(\{2i \mid i \in \mathbb{N}\} \cap \{p \mid p \text{ ist Primzahl}\}) \setminus \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq 0\}$

Aufgabe 4: Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv? Begründe Deine Antworten.

- (a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
- (b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$
- (c) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$
- (d) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
- (e) Die Abbildung von der Menge aller (derzeit lebenden) Menschen in die Menge der Wochentage, die jedem Menschen den Wochentag zuordnet, an dem er geboren ist.
- (f) Die Abbildung von der Menge aller Menschen nach \mathbb{N} , die jedem Menschen sein Geburtsjahr zuordnet.
- (g) $t: \mathbb{N}_{\geq 2} \rightarrow \mathbb{P}$, wobei \mathbb{P} die Menge der Primzahlen bezeichnet und t die Funktion ist, die jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ die größte Primzahl p zuordnet, die n teilt.
- (h) $d: \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$, wobei $2\mathbb{N} := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen bezeichnet und d die Funktion ist, die jeder natürlichen Zahl n ihr Doppeltes $2n$ zuordnet.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es seien A, B und C endliche Mengen. Zeige:
 $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Die Bearbeitungszeit beträgt ausnahmsweise zwei Wochen. Abgabe bis Montag, den 6. November 2017, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.