Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1:
(a) Fülle die folgende Tabelle so aus, dass sie die Additionstabelle einer abelsche Gruppe wird:[1]

+	5	1	2	3	4
5	1	2	?	?	?
1	?	?	?	?	?
2	?	?	?	?	?
3	?	?	?	?	?
4	5	?	?	?	?

(b) Beweise die Eindeutigkeit der Lösung in (a).

Aufgabe 2: Welche der folgenden Paare $(G, *)$ bestehend aus der jeweiligen Menge G und der jeweiligen Abbildung $*$ sind abelsche Gruppen? Welche der Gruppenaxiome sind jeweils erfüllt und welche nicht? Begründe deine Antworten! Hierbei bezeichnen $+$ und $\cdot$ stets die übliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen.

(a) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}, \quad * : G \times G \to G,\ ((x, a), (y, b)) \mapsto (x \cdot y, a + b)$

(b) $G = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \text{ bijektiv}\}, \quad * : G \times G \to G,\ (f, g) \mapsto f \circ g$

(c) $G = \{f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : f \text{ bijektiv}\}, \quad * : G \times G \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\ (f, g) \mapsto (i \mapsto f(i) + g(i))$

(d) $G = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \quad * : G \times G \to G,\ (f, g) \mapsto (i \mapsto f(i) + g(i))$

(e) $G = \mathbb{N}_0, \quad * : G \times G \to G,\ (a, b) \mapsto \mathrm{ggT}(a, b)$, wobei $\mathrm{ggT}(a, b)$ für $(a, b) \neq (0, 0)$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die sowohl a als auch b teilt und $\mathrm{ggT}(0, 0) := 0$.

Aufgabe 3: Beweise Satz 2.1.11 aus der Vorlesung: Es sei I eine Menge und $(G_i, +_i)$ für jedes $i \in I$ eine abelsche Gruppe. Zeige: Dann ist $(\Pi_{i \in I} G_i, +)$ eine abelsche Gruppe, wobei $+$ die punktweise Addition bezeichnet.

Aufgabe 4: Bei welchen der folgenden Abbildungen $f : G \to H$ handelt es sich um Gruppenhomomorphismen?

[1] Tipp: Überlege dir zunächst, was Kommutativität sowie Existenz und Eindeutigkeit des neutralen Elementes und der Inversen für die Tabelle anschaulich bedeuten.

(a) Ist $\mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ q \mapsto q^2$ ein Gruppenhomomorphismus von der Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ in die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$?

(b) Ist $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{>0},\ q \mapsto 2^q$ ein Gruppenhomomorphismus von der Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ in die Gruppe $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$?

(c) Ist $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ q \mapsto \frac{1}{q}$ ein Gruppenendomorphismus der Gruppe $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$?

(d) Ist $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_{>0} \times \mathbb{R},\ (x, q) \mapsto (0, q, -x)$ ein Gruppenhomomorphismus vom direkten Produkt der Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ in das direkte Produkt der Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$?

Begründe jeweils Deine Antwort!

Zusatzaufgabe für Interessierte: Finde ein Beispiel für eine Menge G und eine Abbildung $+ : G \times G \to G$ so, dass $+$ nicht assoziativ ist, aber $(G, +)$ die drei anderen Axiome abelscher Gruppen erfüllt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 20. November 2017, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.