Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 8 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: (15 Punkte) Sei $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{49}\}$ mit $2 := 1+1 \in K$, $3 := 1+1+1 \in K$ und so weiter. Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & -2-i \\ 2 & 1-i & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & -1+i \\ i & 0 & 0 & -i & 1 & 0 & -1 & 2i \end{pmatrix} \in K^{3\times 8}.$$

(a) Berechne eine Matrix $B \in K^{3\times 8}$ in reduzierter Stufenform mit $A \sim B$ durch Anwendung von Zeilenoperationen (dabei sind sämtliche durchgeführten Zeilenoperationen wie in den Beispielen aus der Vorlesung anzuzeigen).

(b) Bestimme die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(*) \qquad Ax = 0 \qquad (x \in K^8).$$

Hinweis: Wenn folgendes nicht gilt, dann ist Deine Rechnung in (a) fehlerhaft:

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} + \frac{3i}{2} \\ \frac{15}{2} - \frac{3i}{2} \end{pmatrix} & \text{falls } K = \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} 5+3i \\ 6+3i \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } K = \mathbb{F}_9 \\ \begin{pmatrix} 9+7i \\ 12+12i \\ 11+16i \end{pmatrix} & \text{falls } K = \mathbb{F}_{49} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Betrachte

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

(a) Bringe A in reduzierte Stufenform.

(b) Bestimme eine Basis des Zeilenraums von A.

(c) Bestimmen eine Basis des Kerns von A.

Aufgabe 3: Es seien A und B zwei Matrizen über einem Körper K mit jeweils n Spalten. Zeige:

(a) $\ker(A) \subseteq \ker(B) \iff \operatorname{row}(A) \supseteq \operatorname{row}(B)$

(b) $\ker(A) \subseteq \operatorname{row}(B) \iff \operatorname{row}(A) \supseteq \ker(B)$

(c) $\operatorname{row}(A) \subseteq \ker(B) \iff \ker(A) \supseteq \operatorname{row}(B)$

Aufgabe 4: Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ bilden einen Untervektorraum des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ [$\to$ 6.1.5] aller rationalen Folgen? Begründe deine Antworten!

(a) $\{a \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \forall i, j \in \mathbb{N} : (i \leq j \implies a(i) \leq a(j))\}$

(b) $\{a \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \exists q \in \mathbb{Q} : \forall i \in \mathbb{N} : a(i) = q\}$

(c) $\{a \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \exists n \in \mathbb{N} : \forall i \in \mathbb{N} : (i \geq n \implies s(i) = 0)\}$

(d) $\{a \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \exists q \in \mathbb{N} : \forall i \in \mathbb{N} : a(i) = qi\}$

Zusatzaufgabe für Interessierte: Ist $(\mathbb{Z}, +)$ die additive Gruppe eines Vektorraums? Begründe Deine Antwort!

Zusatzaufgabe für kulinarisch Interessierte: Es sei
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, $v = \begin{pmatrix} -77\frac{1}{2} \\ 205 \\ 92\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = Av$. Ferner sei d die Anzahl der $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = 0$, $3e$ die Dimension des durch die Spalten von A aufgespannten Unterraumes von $\mathbb{R}^3$ und f die Anzahl der Paare (p_1, p_2), wobei p_1 und p_2 Primzahlen sind und $p_1 + 1 = p_2$.
Gib nun b Gramm Butter, e Eier, c Gramm Zucker und f Päckchen Vanillinzucker mit d EL Wasser in eine Schüssel und schlage das Gemisch schaumig. Füge dabei a Gramm Mehl hinzu. Rolle den Teig glatt aus, stich Formen heraus und backe sie im vorgeheizten Backofen bei ca. 150 Grad zwischen 10 und 14 Minuten lang. Koste das Ergebnis.
(Die Punkte gibt es, wenn Du frische, nach diesem Rezept hergestellte Plätzchen ins erste Tutorium nach der Vorlesungspause mitbringst.)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe der Bearbeitungen, die keine Kekse sind, bis Montag, den 08. Januar 2018, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes. Die Kekse sind im ersten Tutorium nach Ende der Vorlesungspause abzugeben.

FROHE WEIHNACHTEN UND EINEN GUTEN RUTSCH!