Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 12 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und es seien U und W Unterräume von V mit $V = U \oplus W$. Nun sei $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_k)$ eine Basis von U und $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_\ell)$ eine Basis von W. Betrachte ferner das $(k+\ell)$-Tupel

$$\underline{v} := (u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_\ell)$$

von Vektoren von V.

(a) Zeige, dass $\underline{v}$ eine Basis von V ist.

(b) Sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f(U) \subseteq U$ und $f(W) \subseteq W$. Zeige, dass dann die Darstellungsmatrix $M(f, \underline{v})$ von f bezüglich der Basis $\underline{v}$ die Blockgestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

mit $A \in K^{k\times k}$ und $B \in K^{\ell\times\ell}$ hat, wobei die beiden Nullen jeweils für eine Nullmatrix mit der jeweils geeigneten Anzahl von Zeilen und Spalten stehe.

Aufgabe 2: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma \in S_n$ (also $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ bijektiv). Beschreibe die Darstellungsmatrix $A := M(f, \underline{e})$ der linearen Abbildung

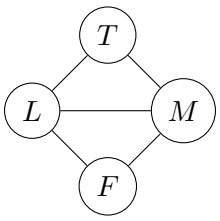
$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\underline{e}$ des $\mathbb{R}^n$ und zeige, dass ihre Determinante gleich dem Vorzeichen der Permutation σ ist, das heißt

$$\det(M(f, \underline{e})) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Ankündigung für eine Veranstaltung im SS 2018: Nächstes Semester bieten Prof. Dr. Markus Schweighofer und Tom Kriel ein Proseminar namens „Graphentheorie“ für Zweitsemester an. Entgegen einer Vorlesung besteht ein Seminar aus Vorträgen der Teilnehmer. Deshalb ist eine Vorbesprechung, in der die Vortragsthemen vergeben werden und die Anmeldung vollzogen wird, notwendig. Diese Vorbesprechung wird am Freitag, den 2.2., um 11:45 in Raum F427 stattfinden. Studenten, welche in diesem Zeitraum eine Übung besuchen, sind für diese entschuldigt und können in dieser Woche ausnahmsweise eine andere besuchen. Die folgende Aufgabe gibt ein Beispiel für Fragestellungen an, welche in der Graphentheorie untersucht werden. Mehr Informationen bzgl. Inhalt, Anrechenbarkeit und Ablauf sind der Webseite `http://www.math.uni-konstanz.de/~kriel/lehre.html` zu entnehmen.

Aufgabe 3: Die äußerst sportliche Tina wohnt im idyllischen Dorf Znatsnok, wo es außer ihrem Wohnhaus T noch die Dorflinde L, den Marktplatz M sowie das Wohnhaus F ihres Freundes gibt. Diese sind wie folgt durch Straßen miteinander verbunden:



Jeder dieser Strecken ist genau einen Kilometer lang (auch wenn es auf dem schematischen Plan anders erscheint). Tina läuft ausschließlich auf den Straßen und zwar immer von einem Endpunkt zum anderen.

(a) Gib in vier Tabellen jeweils an, wie viele Routen der Länge 0, 1, 2 und 3 Kilometern es zwischen je zweien der Orte T, L, M und F gibt.

(b) Berechne die Potenzen $A^0 = I_4$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$ und $A^3 = AAA$ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}.$$

(c) Stelle eine Vermutung über den Zusammenhang der Einträge von A^n und den Routen der Länge n Kilometer für $n \in \mathbb{N}_0$ zwischen zwei Orten von Znatsnok auf und beweise sie.

(d) Tina läuft jeden Tag eine Route von genau tausend Kilometern Länge (sie ist ja äußerst sportlich) zwischen ihrem Haus und dem ihres Freundes (dabei darf sie auf der Route auch mehrmals bei ihrem Freund oder bei sich zuhause vorbeikommen). Befindet sie sich in ihrem Haus, läuft sie zu ihrem Freund und bleibt dort bis zum nächsten Morgen. Befindet sie sich bei ihrem Freund, läuft sie zu sich und bleibt dort bis zum nächsten Morgen. Dabei benutzt sie keine Route zweimal (auch nicht dieselbe rückwärts), weil ihr sonst langweilig wird. Zu Beginn befindet sie sich in ihrem Haus. Wenn es keine neuen Routen mehr gibt, bleibt sie für immer in dem Haus, in dem sie sich befindet. Wird sie zum Schluss bei sich oder bei ihrem Freund wohnen?

Aufgabe 4: Es sei K ein Körper.

(a) Seien $a_1, \ldots, a_n \in K$. Bestimme die Determinante der $n \times n$-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & 0 \end{pmatrix}$

(b) Es seien nun $A_1, \ldots, A_m$ quadratische Matrizen mit Dimensionen $a_1, ..., a_m$ und Einträgen in K; ferner sei $\Sigma_{i=1}^m a_i) = n$. Bestimme die Determinante der $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & & \boxed{A_1} \\ & \boxed{A_2} & \\ & \iddots & \\ \boxed{A_m} & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $m, a_1, ..., a_m$ und $\det(A_1), \ldots, \det(A_m)$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei K ein endlicher Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n\times n}$. Zeige: A ist genau dann invertierbar, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = I_n$ existiert.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 05. Februar 2018, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.