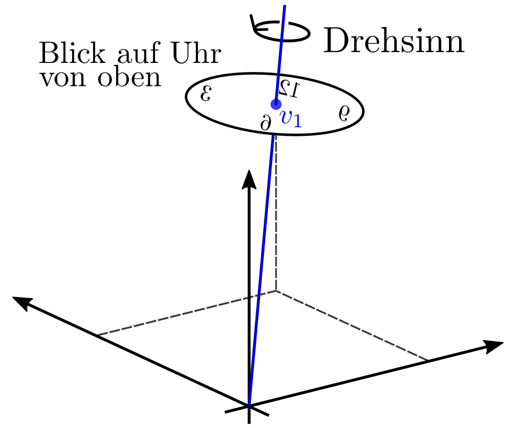
# Lösungsvorschlag für Aufgabe 1 auf Blatt 10

***Voraussetzung:***

Es sei $v_1 \in \mathbb{R}^3$ durch

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Sei weiter $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die jeden Punkt des $\mathbb{R}^3$ an der Ursprungsgeraden durch $v_1$ um 90 Grad im Umlaufsinn einer Uhr dreht, die am Punkt $v_1$ befestigt ist und deren Vorderseite Richtung Ursprung (oder „Uhrsprung“ ☺) zeigt.




***Behauptung:***

(a) Für die Vektoren

$$v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ gilt

$$M(f, \underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*(Es gibt hier mehrere Möglichkeiten, $v_2$ und $v_3$ zu wählen.)*

(b) Für die Basis $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ aus Teil (a) und $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis sind die Basiswechselmatrizen gegeben durch:

$$M(\underline{v}, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M(\underline{e}, \underline{v}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

*(Wenn man in (a) eine andere Wahl für $v_2$ und $v_3$ getroffen hat, sind natürlich auch diese Basiswechselmatrizen anders.)*

(c) Die Matrixdarstellungen der Abbildung $f$ und deren Inverses $f^{-1}$ bezüglich der Standardbasis $\underline{e}$ sind gegeben durch

$$M(f, \underline{e}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M(f^{-1}, \underline{e}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

*(Diese Matrizen müssen für jede mögliche (korrekte) Wahl von $v_2$ und $v_3$ in (a) genau wie hier angegeben herauskommen. Ist dies nicht der Fall, so hat man vermutlich die Beschreibung der Abbildung $f$ falsch verstanden und/oder die Vektoren $v_2$ und $v_3$ nicht passend zu den Angaben gewählt.)*

*Beweis.*

(a) Dass $M(f, \underline{v})$ die angegebene Form hat, ist nach Bemerkung 7.1.2 gleichbedeutend zu

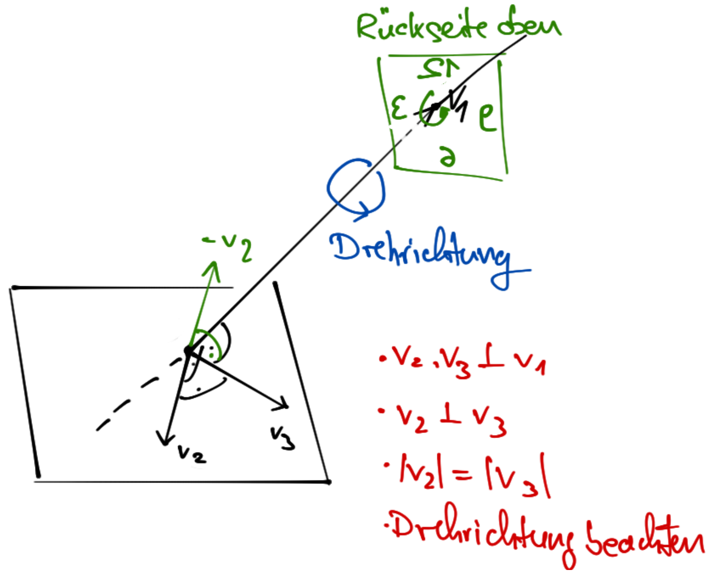
$$(1) \quad \mathrm{coord}_{\underline{v}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad f(v_1) = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = v_1\,,$$

$$(2) \quad \mathrm{coord}_{\underline{v}}(f(v_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad f(v_2) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = v_3\,,$$

$$(3) \quad \mathrm{coord}_{\underline{v}}(f(v_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad f(v_3) = 0 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = -v_2\,.$$

Um die Behauptung zu zeigen, müssen wir also erklären, wieso dies für die angegebenen Vektoren und die Drehung $f$ gilt.

*(Die Begründung muss teilweise anschaulich geschehen, da die Abbildung $f$ in der Aufgabenstellung auch nur anschaulich beschrieben wurde. Zudem muss auf den Begriff der Orthogonalität, der über das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ definiert ist, aus der Schule zurückgegriffen werden. Zur Orientierung kann nebenstehende Skizze helfen.)*




<u>*Begründung von (1):*</u> Da $f$ um die Urpsrungsgerade durch $v_1$ dreht, verändert sich $v_1$ unter $f$ nicht ($v_1$ liegt auf der Drehachse). Deshalb gilt $f(v_1) = v_1$.

<u>*Begründung von (2) und (3):*</u> Die Vektoren $v_2$ und $v_3$ stehen im 90-Grad Winkel zueinander, denn es gilt

$$\sqrt{3} \cdot 1 + (-\sqrt{3}) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = 0 \qquad \text{(Skalarprodukt von } v_1 \text{ und } v_2 \text{ ist 0)}$$

Außerdem haben sie dieselbe Länge, denn es gilt (Pythagoras bzw. euklidisches Skalarprodukt)

$$|v_2|^2 = \sqrt{3}^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2 = 6\,,$$
$$|v_3|^2 = 1^2 + 1^2 + (-2)^2 = 6\,.$$

Zuletzt stehen sie beide senkrecht zu $v_1$, denn es gilt

$$\sqrt{3} \cdot 1 + (-\sqrt{3}) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 \qquad \text{(Skalarprodukt von } v_2 \text{ und } v_1 \text{ ist 0)}\,,$$
$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0 \qquad \text{(Skalarprodukt von } v_3 \text{ und } v_1 \text{ ist 0)}\,.$$

Aus diesem Grund muss einer der beiden unter der Drehung $f$ in den anderen übergeführt werden und der andere wiederum in das Negative des einen (beachte, dass hierfür auch erforderlich ist, dass $v_2$ und $v_3$ dieselbe Länge haben). An einer Skizze macht man sich klar, dass $f(v_2) = v_3$ gilt, denn $v_2$ liegt in der $x_1x_2$-Ebene (d.h. seine $x_3$-Koordinate ist 0) und deshalb muss $f(v_2)$ negative $x_3$-Koordinate haben (Drehsinn beachten).

Dass dann auch $f(v_3) = -v_2$ gilt, folgt automatisch (da beide Vektoren senkrecht zur Drehachse sind).

*(Im Anschluss des Beweises wird noch erklärt, wie man auf die Vektoren $v_2$ und $v_3$ kommt. Dazu wird im Grund die obige Argumentation „rückwärts“ zur Berechnung verwendet.)*

(b) Nach Definition 7.1.10 der Basiswechselsmatrix gilt

$$\begin{aligned} M(\underline{v}, \underline{e}) &= M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, \underline{v}, \underline{e}) \\ &= (\mathrm{coord}_{\underline{e}}(v_1)\ \mathrm{coord}_{\underline{e}}(v_2)\ \mathrm{coord}_{\underline{e}}(v_3)) \\ &= (v_1\ v_2\ v_3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im dritten Schritt verwendet, dass $\mathrm{coord}_{\underline{e}}(x) = x$ für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ gilt, da $\underline{e}$ die Standardbasis (Einheitsvektoren) ist.

Bezüglich $M(\underline{e}, \underline{v})$ verwenden wir, dass nach Proposition 7.2.11 $M(\underline{e}, \underline{v}) = M(\underline{v}, \underline{e})^{-1}$ gilt. Diese inverse Matrix bestimmen wir mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \sqrt{3} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2 \leftarrow Z_2 - Z_1 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \sqrt{3} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_2 \leftarrow -\frac{1}{2} Z_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \sqrt{3} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{Z_1 \leftarrow Z_1 - Z_2 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_3 \leftarrow -\frac{1}{3} Z_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{Z_1 \leftarrow Z_1 - Z_3 \\ Z_2 \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{3} Z_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Damit ergibt sich also

$$M(\underline{e}, \underline{v}) = M(\underline{v}, \underline{e})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

(Durch Ausführen der Matrixmultiplikation prüft man, dass dies in der Tat die inverse Matrix von $M(\underline{e}, \underline{v})$ ist.)

(c) Wir verwenden, dass nach Definition 7.1.1 bzw. Bemerkung 7.1.2 $M(f, \underline{e})$ die *eindeutige* Matrix ist mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \quad \mathrm{coord}_{\underline{e}}(f(x)) = M(f, \underline{e}) \cdot \mathrm{coord}_{\underline{e}}(x) .$$

Ebenso ist $M(f, \underline{v})$ die *eindeutige* Matrix mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \quad \mathrm{coord}_{\underline{v}}(f(x)) = M(f, \underline{v}) \cdot \mathrm{coord}_{\underline{v}}(x) .$$

Beachte weiter, dass nach demselben Argument sowie der Definition der Basiswechselmatrizen für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\mathrm{coord}_{\underline{v}}(x) = \mathrm{coord}_{\underline{v}}(\mathrm{id}(x)) = M(\mathrm{id}, \underline{e}, \underline{v}) \cdot \mathrm{coord}_{\underline{e}}(x) = M(\underline{e}, \underline{v}) \cdot \mathrm{coord}_{\underline{e}}(x)$$

Analog ergibt sich

$$\mathrm{coord}_{\underline{e}}(f(x)) = M(\underline{v}, \underline{e}) \cdot \mathrm{coord}_{\underline{v}}(f(x))\,.$$

Zusammen ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \mathrm{coord}_{\underline{e}}(f(x)) &= M(\underline{v}, \underline{e}) \cdot \mathrm{coord}_{\underline{v}}(f(x)) \\ &= M(\underline{v}, \underline{e}) \cdot M(f, \underline{v}) \cdot \mathrm{coord}_{\underline{v}}(x) \\ &= M(\underline{v}, \underline{e}) \cdot M(f, \underline{v}) \cdot M(\underline{e}, \underline{v}) \cdot \mathrm{coord}_{\underline{e}}(x) \end{aligned}$$

Da dies für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ gilt, folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellungsmatrix, dass

$$M(f, \underline{e}) = M(\underline{v}, \underline{e}) \cdot M(f, \underline{v}) \cdot M(\underline{e}, \underline{v})$$

gilt. Dieses Matrixprodukt rechen wir nun aus:

$$\begin{aligned} M(f, \underline{e}) &= M(\underline{v}, \underline{e}) \cdot M(f, \underline{v}) \cdot M(\underline{e}, \underline{v}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Berechnung von $M(f^{-1}, \underline{e})$ ist es hier am geschicktestens, nochmals zu verwenden, dass auch für diese die Formel

$$M(f^{-1}, \underline{e}) = M(\underline{v}, \underline{e}) \cdot M(f^{-1}, \underline{v}) \cdot M(\underline{e}, \underline{v})\,.$$

gilt. Die Matrix $M(f^{-1}, \underline{v})$ lässt sich nämlich ganz leicht bestimmen, denn es gilt zunächst

$$\begin{aligned} f(v_1) = v_1 &\Longrightarrow v_1 = f^{-1}(v_1) \\ f(v_2) = v_3 &\Longrightarrow v_2 = f^{-1}(v_3) \\ f(v_3) = -v_2 &\Longrightarrow v_3 = f^{-1}(-v_2) = -f^{-1}(v_2) \Longrightarrow -v_3 = f^{-1}(v_2)\,. \end{aligned}$$

Man kann nun die Koordinatenvektoren von $f^{-1}(v_1)$, $f^{-1}(v_2)$ und $f^{-1}(v_3)$ bezüglich der Basis $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ direkt ablesen und erhält:

$$M(f^{-1}, \underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit schließlich

$$\begin{aligned}
M(f^{-1},\underline{e}) &= M(\underline{v},\underline{e})\cdot M(f^{-1},\underline{v})\cdot M(\underline{e},\underline{v})\\
&= \begin{pmatrix}1 & \sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3} & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & -1 & \sqrt{3}\\ 1 & -1 & -\sqrt{3}\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

---

***Verfahren zur Bestimmung der Vektoren $v_2$ und $v_3$ aus Teil (a)***

Wir nutzen folgende beiden Eigenschaften einer Drehung:

(D1) Eine Drehung verändert die Länge eines Vektors nicht.

(D2) Eine Drehung verändert den Winkel zwischen zwei Vektoren nicht (d.h. der Winkel zwischen zwei Vektoren und der Winkel zwischen den beiden gedrehten Vektoren sind gleich).

*(Diese Eigenschaft können hier nicht weiter begründet werden, da Sie keine formale Definition des Begriffs Drehung haben. Sie müssen daher Ihre anschaulich Vorstellung von einer Drehung bemühen, was so in der Aufgabe auch gewollt war.)*

Nun leiten wir aus den Bedingungen (1),(2),(3), die sich in Teil (a) aus der geforderten Form von $M(f,\underline{v})$ ergeben haben, Bedingungen an die gesuchten Vektoren her, welche sich in Gleichungen übersetzen lassen. Die Vektoren ergeben sich dann als Lösungen dieser Gleichungen.

Aus (1): Da $f$ um die Urpsrungsgerade durch $v_1$ dreht, verändert sich $v_1$ unter $f$ nicht ($v_1$ liegt auf der Drehachse). Deshalb gilt $f(v_1) = v_1$. Bedingung (1) ist also automatisch erfüllt und liefert somit auch keine Hilfe bei der Bestimmung von $v_2$ und $v_3$.

Aus (2): Aus $f(v_2) = v_3$ folgt, dass $v_2$ und $v_3$ dieselbe Länge haben müssen, da sie ja durch eine Drehung ineinander übergeführt werden können (D1). Zudem ergibt sich $v_3$ gerade durch die Drehung aus der Aufgabenstellung aus $v_2$. Wir erhalten somit als Bedingungen:

- Die Vektoren $v_3$ und $v_2$ müssen dieselbe Länge haben.
- Der Vektor $v_3$ muss sich aus dem Vektor $v_2$ durch eine 90-Grad-Drehung im Sinne der angegeben Uhr ergeben.

Aus (3) Aus $f(v_2) = v_3$ und $f(v_3) = -v_2$ ergibt sich $f(f(v_2)) = -v_2$. Also muss $v_2$ bei einer zweifachen Drehung um 90 Grad, also einer Drehung um 180 Grad um die gegebene Drehachse in sein Negatives übergehen. Entweder anhand einer Skizze oder anhand der „Nebenrechnung“ unten erkennt man, dass $v_2$ deshalb senkrecht zur Achse $v_1$ stehen muss.

- Die Vektoren $v_2$ und $v_1$ sind senkrecht zueinander.

*Nebenrechnung:* *Wegen (D2), zweimal angewendet, ist der Winkel zwischen $v_1$ und $v_2$ derselbe wie zwischen $f^2(v_1)$ und $f^2(v_2)$. Wegen $f^2(v_1) = v_1$ und $f^2(v_2) = -v_2$ müssen somit $v_1$ und $v_2$ im selben Winkel zueinander stehen wie $v_1$ und $-v_2$. Da die Summe dieser beiden*

*Winkel aber* $180$ *Grad ergeben muss (Skizze!), muss der Winkel zwischen* $v_1$ *und* $v_2$ *somit* $90$ *Grad sein.*

Wegen $f(v_2) = v_3$ und $f(v_1) = v_1$ müssen aufgrund von (D2) die Vektoren $v_3$ und $v_1$ ebenfalls orthogonal sein.

– Die Vektoren $v_3$ und $v_1$ sind senkrecht zueinander.

Also liegen $v_2$ und $v_3$ beide in der Ebene senkrecht zur Drehachse. Da sie durch eine 90-Grad-Drehung um diese Achse ineinander übergehen, müssen sie deshalb auch orthogonal zueinander sein:

– Die Vektoren $v_2$ und $v_3$ sind senkrecht zueinander.

Aus diesen Überlegungen erstellen wir nun eine Vorgehensweise zur Bestimmung der gesuchten Vektoren $v_2$ und $v_3$ und führen diese auch gleich aus. Dabei übersetzen wir die Forderungen nach Orthogonalität und gleicher Länge mittels des (euklidischen) Skalarproduktes in Gleichungen. *(Das Skalarprodukt kam zwar in der Linearen Algebra noch nicht dran, durfte/musste hier aber dennoch verwendet werden.)*

Anleitung zur Bestimmung von $v_2$ und $v_3$:

- Wähle einen Vektor $\widetilde{v}_2 \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf dem gegebenen Vektor $v_1$ steht. Für $\widetilde{v}_2$ machen wir den Ansatz $\widetilde{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit zu bestimmenden $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Die Forderung, dass dieser Vektor senkrecht zu $v_1$ stehen soll, bedeutet dann, dass
$$0 = x_1 + x_2 + x_3 \qquad (= \text{Skalarprodukt von } v_1 \text{ mit } \widetilde{v}_2)$$
gilt. Eine einfach Lösung hiervon ist
$$\widetilde{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
*(Wir schreiben hier* $\widetilde{v}_2$*, da wir am Ende die Länge dieses Vektors nochmals ändern.)*
- Wähle einen Vektor $\widetilde{v}_3$, der sowohl senkrecht zu $v_1$ wie auch zu $\widetilde{v}_2$ steht. Für diesen machen wir wie oben einen Ansatz $\widetilde{v}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit zu bestimmenden $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Die Fordernung nach Orthogonalität zu $v_1$ und $\widetilde{v}_2$ führt dazu, dass die Gleichungen
$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_2 + x_3\,, && (= \text{Skalarprodukt von } v_1 \text{ mit } \widetilde{v}_3) \\ 0 &= x_1 - x_2\,. && (= \text{Skalarprodukt von } v_2 \text{ mit } \widetilde{v}_3) \end{aligned}$$
erfüllt sein müssen. Abgesehen von der Länge gibt es zwei nichttriviale Lösungen dieser Gleichung, nämlich $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Der Unterschied zwischen diesen Vektoren ist, dass sie in entgegensetzte Richtungen zeigen. *(Anschaulich sollte klar sein, dass es bis auf die Länge genau zwei verschiedene Vektoren gibt, die senkrecht auf* $v_1$ *und* $\widetilde{v}_2$ *stehen.)* Der richtige der beiden ist derjenige, der ein positives Vielfaches des im Umlaufsinn der Uhr um 90 Grad gedrehten Vektors $\widetilde{v}_2$ ist (damit am Ende (2) erfüllt ist). Anhand einer Skizze erkennt man, dass dies der erste von den beiden ist (z.B. am negativen dritten Eintrag). Wir setzen somit
$$\widetilde{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Wir skalieren $\widetilde{v}_2$ so um, dass er dieselbe Länge wie $\widetilde{v}_3$ hat. Die Längen von $\widetilde{v}_2$ und $\widetilde{v}_3$ sind (Pythagoras bzw. euklidisches Skalarprodukt):
$$|\widetilde{v}_2|^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2\,, \qquad |\widetilde{v}_3|^2 = 1^2 + 1^2 + (-2)^2 = 6\,.$$
Wenn wir den Vektor $\widetilde{v}_2$ mit $\sqrt{3}$ strecken, erhalten wir somit einen Vektor, der gleich lang ist wie $\widetilde{v}_3$. Wir setzen deshalb nun
$$v_2 := \sqrt{3}\cdot\widetilde{v}_2 = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}\,, \qquad v_3 := \widetilde{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}\,.$$

Bezüglich der geforderten Eigenschaften (2) und (3) überlegen wir uns nochmals:

zu (2) Diese gilt, da beide Vektoren senkrecht zur Drehachase und senkrecht zueinander liegen, und $v_3$ gerade so gewählt wird, dass er im Sinne der Uhr aus $v_2$ durch eine 90-Grad-Drehung hervorgeht.

zu (3) Dies gilt ebenfalls, da beide Vektoren senkrecht zur Drehachse sind und sich $v_3$ aus $v_2$ durch eine 90-Grad-Drehung im Sinne der Uhr ergibt. Denn deshalb ergibt sich durch eine nochmalige solche Drehung aus $v_3$ gerade $-v_2$.

zu (1) Da $v_1$ auf der Drehachse liegt, gilt $f(v_1) = v_1$.

zu (2) & (3) Es gelten:
- $v_2$ und $v_3$ liegen in der Ursprungsebene senkrecht zur Drehachse
- liegt ein Vektor aus dieser Ebene