

Lösungsvorschlag für Aufgabe 1 auf Blatt 11

Vor.: K ist ein Körper, V ist ein endlicher K -Vektorraum, $U \subseteq V$ ist ein Untervektorraum und $u, v \in V/U$.

Beh.:

- (a) Es gilt $\#u = \#u = \#U$.
- (b) Es gilt $\#(V/U) = \frac{\#V}{\#U}$.

(Im Prinzip folgen die Behauptung direkt aus Proposition 2.3.7 bzw. den darin zitierten Aussagen aus dem Skript. Wir führen trotzdem nochmal einen elementaren Beweis, um den Umgang mit den grundlegenden Definitionen der Quotientenbildung zu illustrieren.)

Beweis. Setze $n := \#V$ und $k := \#U$. Bezeichne weiter mit $v_1, \dots, v_n$ die Elemente von V . Durch entsprechende Nummerierung dieser Elemente dürfen wir davon ausgehen, dass $U = \{v_1, \dots, v_k\}$ gilt.

- (a) Wähle $x \in V$ mit $u = \bar{x}$. Es gilt

$$\begin{aligned} u = \bar{x} &\stackrel{\text{Def. 1.3.1}}{=} \{y \in V \mid y \equiv_U x\} \\ &\stackrel{\text{Def. 2.3.5}}{=} \{y \in V \mid y - x \in U\} \\ &= \{y \in V \mid y - x \in \{v_1, \dots, v_k\}\} \\ &= \{x + v_1, \dots, x + v_k\}. \end{aligned}$$

Da die Elemente $v_1, \dots, v_k$ alle verschieden sind, sind auch $x + v_1, \dots, x + v_k$ verschieden. Hieraus folgt, dass $\#u = k = \#U$ gilt. Analog folgt, dass auch $\#v = \#U$ gilt.

- (b) Setze $m := \#(V/U)$ und bezeichne mit $u_1, \dots, u_m$ die Elemente von V/U . Diese sind alle Teilmengen von V , welche nach Satz 1.3.6 eine Zerlegung von V bilden, d.h. es gilt:

$$V = u_1 \cup \dots \cup u_m \quad \text{und} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\} : u_i \cap u_j = \emptyset.$$

Dies bedeutet, dass jedes Element von V in *genau* einer der Teilmengen $u_1, \dots, u_m \subseteq V$ liegt. Deshalb gilt

$$\#V = \#u_1 + \dots + \#u_m \stackrel{(a)}{=} \underbrace{\#U + \dots + \#U}_{m \text{ mal}} = m \cdot \#U = \#(V/U) \cdot \#U.$$

Umstellen ergibt die Behauptung.

□