

Lösungsvorschlag für Aufgabe 1 auf Blatt 12

Vor.: Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, $U, W \subseteq V$ Unterräume von V mit $V = U \oplus W$ und $\underline{u} = (u_1, \dots, u_k)$ eine Basis von U sowie $\underline{w} = (w_1, \dots, w_\ell)$ eine Basis von W . Sei weiter $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $f(U) \subseteq U$ und $f(W) \subseteq W$.

Beh.:

- (a) Es ist $\underline{v} := (u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_\ell)$ eine Basis von V .
- (b) Bezüglich der Basis $\underline{v}$ aus Teil (a) gilt

$$M(f, \underline{v}) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

für gewisse Matrizen $A \in K^{k \times k}$ und $B \in K^{\ell \times \ell}$ (wobei die zwei Nullen jeweils Matrizen passender Größe bezeichnen, deren sämtliche Einträge 0 sind).

Beweis. Wir schreiben zunächst aus, was die Voraussetzung $V = U \oplus W$ gemäß Definition 8.2.1 der direkten Summe bedeutet:

$$\begin{aligned} V = U \oplus W & \stackrel{\text{Def. 8.2.1}}{\iff} f : U \times W \rightarrow V, f(u, w) := u + w \text{ ist injektiv und } f(U \times W) = V \\ & \iff f : U \times W \rightarrow V, f(u, w) := u + w \text{ ist bijektiv} \\ & \iff \forall v \in V : \exists! u \in U : \exists! w \in W : v = f(u, w) = u + w. \end{aligned}$$

(Die Existenz ist die Surjektivität, die Eindeutigkeit die Injektivität.)

Oder nochmals in Worten:

Dass $V = U \oplus W$ gilt, bedeutet, dass sich *jeder* Vektor aus V auf *eindeutige* Art und Weise als Summe eines Vektors aus U und eines Vektors aus W schreiben lässt. (*)

- (a) Gemäß Definition 6.2.1 des Begriffs der Basis müssen wir zeigen, dass die Vektoren $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_\ell$ linear unabhängig sind und V erzeugen.

Lineare Unabhängigkeit: Wir verwenden das Kriterium aus Proposition 6.2.3. Seien dazu $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_\ell \in K$ gegeben mit $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_\ell w_\ell = 0$. Beachte nun, dass natürlich $u := \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \in U$ und $w := \mu_1 w_1 + \dots + \mu_\ell w_\ell \in W$ gilt. Somit ist $0 = u + w$ eine Darstellung des Vektors $0 \in V$ als Summe eines Vektors aus U und eines Vektors aus W . Andererseits gilt aber auch $0 = 0 + 0$ und $0 \in U$ sowie $0 \in W$, da U und W Unterräume sind. Aus (*) folgt somit $u = 0$ und $w = 0$. Also gelten $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$ und $w := \mu_1 w_1 + \dots + \mu_\ell w_\ell = 0$. Aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $u_1, \dots, u_k$ folgt nun $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_k = 0$ und aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $w_1, \dots, w_\ell$ folgt $\mu_1 = 0, \dots, \mu_\ell = 0$. Damit ist nachgewiesen, dass $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_\ell$ linear unabhängig sind.

Erzeugendensystem: Sei $v \in V$ gegeben. Nach (*) gibt es (eindeutige) Vektoren $u \in U$ und $w \in W$ mit $v = u + w$. Da $u_1, \dots, u_k$ eine Basis von U sind, gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$. Und da $w_1, \dots, w_\ell$ eine Basis von W sind, gibt es $\mu_1, \dots, \mu_\ell \in K$ mit $w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_\ell w_\ell$. Für solche gilt dann natürlich auch

$$v = u + w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_\ell w_\ell.$$

Also gilt $v \in \text{span}\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_\ell\}$. Da der Vektor $v \in V$ beliebig war, folgt $V \subseteq \text{span}\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_\ell\}$. Wegen $U, W \subseteq V$ gilt die umgekehrte Inklusion natürlich auch und somit gilt $V = \text{span}\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_\ell\}$.

- (b) Nach Definition 7.1.1 des Begriffs der Darstellungsmatrix bzw. Bemerkung 7.1.2 sind die Spalten der Matrix $M(f, \underline{v})$ genau die $\underline{v}$ -Koordinatenvektoren der Bilder unter f der $\underline{v}$ -Basisvektoren. Genauer:

$$\begin{aligned} M(f, \underline{v}) &= (\text{coord}_{\underline{v}}(f(v_1)) \quad \cdots \quad \text{coord}_{\underline{v}}(f(v_{k+\ell}))) \\ &= (\text{coord}_{\underline{v}}(f(u_1)) \quad \cdots \quad \text{coord}_{\underline{v}}(f(u_k)) \quad \text{coord}_{\underline{v}}(f(w_1)) \quad \cdots \quad \text{coord}_{\underline{v}}(f(w_\ell))) . \end{aligned}$$

Jeder dieser Koordinatenvektoren ist ein Element von $K^{k+\ell}$. Wir müssen zeigen, dass die letzten ℓ Einträge der Koordinatenvektoren $\text{coord}_{\underline{v}}(f(u_1)), \dots, \text{coord}_{\underline{v}}(f(u_k))$ gleich 0 sind, und dass die ersten k Einträge der Koordinatenvektoren $\text{coord}_{\underline{v}}(f(w_1)), \dots, \text{coord}_{\underline{v}}(f(w_\ell))$ gleich 0 sind.

Wir beginnen mit $\text{coord}_{\underline{v}}(f(u_1))$. Dazu schreiben wir diesen explizit als

$$\text{coord}_{\underline{v}}(f(u_1)) =: \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_\ell \end{pmatrix}, \text{ d.h. } f(u_1) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_\ell w_\ell. \quad (**)$$

Wir wollen zeigen, dass $\mu_1 = 0, \dots, \mu_\ell = 0$ gilt. Beachte nun, dass $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \in U$ und $\mu_1 w_1 + \dots + \mu_\ell w_\ell \in W$ gelten. Somit ist die rechte Gleichung in (**) eine Zerlegung von $f(u_1)$ in die Summe eines Vektors aus U und eines Vektors aus W . Aufgrund der Voraussetzung $f(U) \subseteq U$ gilt andererseits $f(u_1) \in U$ und somit ist auch

$$f(u_1) = \underbrace{f(u_1)}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in W}$$

eine Darstellung von $f(u_1)$ als Summe eines Vektor aus U und eines Vektors aus W (beachte hierbei wieder, dass $0 \in W$ gilt, da $W \subseteq V$ ein Untervektorraum ist). Aufgrund der Eindeutigkeit (*) einer solchen Darstellung folgt somit

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = f(u_1) \quad \text{und} \quad \mu_1 w_1 + \dots + \mu_\ell w_\ell = 0.$$

Da die Vektoren $w_1, \dots, w_\ell$ linear unabhängig sind, folgt aus der zweiten Gleichung, dass $\mu_1 = 0, \dots, \mu_\ell = 0$ gelten. Damit ist gezeigt, dass die erste Spalte der Matrix $M(f, \underline{v})$ die gewünschte Form hat.

Die Spalten 2 bis k , d.h. die Koordinatenvektoren $\text{coord}_{\underline{v}}(f(u_2)), \dots, \text{coord}_{\underline{v}}(f(u_k))$ lassen sich wortwörtlich gleich behandeln, man muss lediglich u_1 durch $u_2, \dots, u_k$ ersetzen. Auch die hinteren ℓ Spalten, d.h. die Koordinatenvektoren $\text{coord}_{\underline{v}}(f(w_1)), \dots, \text{coord}_{\underline{v}}(f(w_\ell))$ lassen sich ähnlich abhandeln, es vertauschen sich lediglich noch die Rollen von U und W und damit die Rollen der Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und $\mu_1, \dots, \mu_\ell$ (was ja auch erwünscht ist, da man in diesen Fällen zeigen muss, dass $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ alle 0 sind).

Damit ist gezeigt, dass die Matrix $M(f, \underline{v})$ die behauptete Gestalt hat.

□