Lösungsvorschlag für Aufgabe 4 auf Blatt 13

Vor.: Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix.

Beh.: Die zu A inverse Matrix $A^{-1} \in K^{n\times n}$ ist ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix.

Wir geben zwei verschiedene Beweise: Der erste verläuft per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ und läuft gedanklich entlang der Art wie man per Gauß-Verfahren die Inverse einer Matrix bestimmt. Der zweite Beweis benutzt die Formel für die Inverse mittels der Komatrix.

Idee hinter dem Induktionsbeweis: Hinter einer Induktion steckt immer ein „schrittweises Vorgehen“. Hier ist dieses „schrittweise Vorgehen“ das schrittweise Invertieren der gegebenen Matrix A mittels Gauß-Verfahren. Bringt man für eine invertierbare obere Dreiecksmatrix nämlich zunächst die letzte Spalte „in Form“, so erhält man:

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccccc|ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_{nn}}
\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccccc|ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{nn}} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{nn}} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_{nn}}
\end{array}$$

Man sieht, dass die Matrix auf der rechten Seite immer noch obere Dreiecksgestalt hat. Nun verfährt man „immer so weiter“ mit den verbleibenden $n-1$ Spalten. Spätestens nach diesen Gedankengängen bzw. dem Stichwort „immer so weiter“ sollten Sie an vollständige Induktion denken.

Beweis 1. Wir führen eine Beweis per vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: $(n = 1)$

Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen, da jede (1×1)-Matrix obere Dreiecksform hat.

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n + 1)$

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben.

Wir nehmen an, dass die inverse Matrix jeder invertierbaren oberen Dreiecksmatrix der Größe $n \times n$ wieder eine obere Dreiecksmatrix ist (*Induktionsvoraussetzung*).

Wir müssen zeigen, dass auch die inverse Matrix jeder invertierbaren oberen Dreiecksmatrix der Größe $(n + 1) \times (n + 1)$ wieder eine obere Dreiecksmatrix ist (*Induktionsbehauptung*).

Sei dazu eine invertierbare obere Dreiecksmatrix $A \in K^{(n+1)\times(n+1)}$ gegeben. Wir schreiben

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & b \\ \hline 0 & a_{n+1,n+1} \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad B := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n\times n} \text{ und } b := \begin{pmatrix} a_{1(n+1)} \\ \vdots \\ a_{n(n+1)} \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}.$$

Dann ist auch B wieder eine oberer Dreiecksmatrix. Wegen $0 \neq \det(A) = \det(B) \cdot a_{n+1,n+1}$ ist zudem $\det(B) \neq 0$ und somit ist auch B invertierbar. Sei $B^{-1} \in K^{n \times n}$ die zu B inverse Matrix. Nach Induktionsvoraussetzung ist B eine obere Dreiecksmatrix. Wir behaupten, dass die zu A inverse Matrix gegeben ist durch

$$A^{-1} \overset{\text{Beh.}}{=} \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & -\frac{1}{a_{n+1,n+1}} B^{-1} b \\ \hline 0 & \frac{1}{a_{n+1,n+1}} \end{array}\right) . \tag{$*$}$$

Machen Sie sich klar, wieso man mittels Gauß-Verfahren genau auf diese Matrix kommt (siehe Hinweis vor dem Beweis). Die zusätzliche Matrix B^{-1} im Block oben rechts ist notwendig, da beim Umformen der ersten $n-1$ Spalten („von rechts nach links“) durch Zeilentransformationen auch immer noch die Einträge der letzten Spalte mit umgeformt werden. Diese Zeilentransformationen werden genau durch B^{-1} „codiert“.

Die Matrix auf der rechten Seite von $(*)$ ist eine obere Dreiecksmatrix, da B^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist. Wenn wir also nachweisen können, dass die Matrix auf der rechten Seite von $(*)$ in der Tat die zu A inverse Matrix ist, ist der Induktionsschritt abgeschlossen. Hierzu rechnen wir

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} B & b \\ \hline 0 & a_{n+1,n+1} \end{array}\right)}_{A} \cdot \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & -\frac{1}{a_{n+1,n+1}} B^{-1} b \\ \hline 0 & \frac{1}{a_{n+1,n+1}} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} B \cdot B^{-1} + 0 \cdot b & -\frac{1}{a_{n+1,n+1}} B \cdot B^{-1} \cdot b + \frac{1}{a_{n+1,n+1}} b \\ \hline 0 \cdot B^{-1} + a_{n+1,n+1} \cdot 0 & -\frac{1}{a_{n+1,n+1}} 0 \cdot B^{-1} \cdot b + a_{n+1,n+1} \cdot \frac{1}{a_{n+1,n+1}} \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I_{n+1} .
\end{aligned}$$

Sie sollten sich klar machen, dass dieses „blockweise“ Matrizenmultiplizieren in der Tat so funktioniert wie hier angegeben.

Damit ist also gezeigt, dass die Matrix auf der rechten Seite von $(*)$ in der Tat die zu A inverse Matrix ist. Also ist der Induktionsschritt vollzogen.

Nach dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion ist damit die Behauptung gezeigt. □

Beweis 2. Wir beweisen die Behauptung unter Verwendung der Komatrix $\operatorname{com} A$. Da A invertierbar ist, gilt nach Korollar 9.2.5:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{com} A)^T .$$

Wenn wir also zeigen können, dass $\operatorname{com} A$ eine *untere* Dreiecksmatrix ist, ist damit auch gezeigt, dass A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist (beachte das Transponieren). Um dies nachzuweisen, führen wir geeignete Bezeichnungen für die Einträge der verschiedenen Matrizen ein. *(Eventuell kann man sich dies alternativ auch „schematisch-graphisch“ überlegen.)*

Bezeichnen wir die Einträge der Komatrix mit c_{ij} (wobei $i, j \in \{1, \ldots, n\}$), so gilt für diese nach Definition 9.2.3 der Komatrix:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} ,$$

wobei $A_{ij} \in K^{(n-1) \times (n-1)}$ die Matrix bezeichnet, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Wir führen nun auch eine Bezeichnung für deren Einträge ein: Bezeichnen wir die Einträge von A mit a_{ij} (wobei $i, j \in \{1, \ldots, n\}$) und für gegebene $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

die Einträge von A_{ij} mit $a_{k\ell}^{(ij)}$ (wobei $k, \ell \in \{1, \ldots, n-1\}$), so gilt der Zusammenhang

$$a_{k\ell}^{(ij)} = \begin{cases} a_{k\ell} & k < i, \ell < j\,, \\ a_{k+1,\ell} & k \geq i, \ell < j\,, \\ a_{k,\ell+1} & k < i, \ell \geq j\,, \\ a_{k+1,\ell+1} & k \geq i, \ell \geq j\,. \end{cases} \tag{$*$}$$

(Man kann sich das gut schematisch anhand der vier „Quadranten“ von A_{ij} klar machen.)

Um zu zeigen, dass $\operatorname{com} A$ eine *untere* Dreiecksmatrix ist, müssen wir zeigen, dass $c_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i < j$ gilt. Dazu müssen wir zeigen, dass $\det(A_{ij}) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i < j$ gilt. Seien dazu $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i < j$ gegeben. Wir zeigen:

(1) A_{ij} ist wieder eine obere Dreiecksmatrix.

(2) Es gilt $a_{ii}^{(ij)} = 0$.

Hieraus folgt, dass $\det(A_{ij}) = 0$ gilt, da wegen (1) diese Determinante das Produkt der Diagonaleinträge von A_{ij} ist und wegen (2) mindestens einer dieser Einträge 0 ist.

Zu (1): Für müssen zeigen, dass $a_{k\ell}^{(ij)} = 0$ für alle $k, \ell \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $k > \ell$ gilt. Seien dazu $k, \ell \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $k > \ell$ gegeben. Wir unterscheiden die vier Fälle in $(*)$:

- Im Fall $k < i, \ell < j$ gilt $a_{k\ell}^{(ij)} = a_{k\ell} = 0$, wobei die letzte Gleichung gilt, da A eine obere Dreiecksmatrix ist und $k > \ell$ gilt.
- Im Fall $k \geq i$ und $l < j$ gilt $a_{k\ell}^{(ij)} = a_{k+1,\ell} = 0$, wobei die letzte Gleichheit gilt, da A eine obere Dreiecksmatrix ist und $k + 1 > k > \ell$ gilt.
- Der Fall $k < i$ und $\ell \geq j$ tritt wegen der beiden Voraussetzungen $i < j$ und $k > \ell$ nicht ein, denn ansonsten hätte man die Ungleichungskette $j \leq \ell < k < i < j$ und $j < j$ kann nicht gelten.
- Im Fall $k \geq i$ und $\ell \geq j$ gilt $a_{k\ell}^{(ij)} = a_{k+1,\ell+1} = 0$, wobei die letzte Gleichungen gilt, da A eine obere Dreiecksmatrix ist und wegen $k > \ell$ auch $k + 1 > \ell + 1$ gilt.

Damit ist (1) nachgewiesen.

Zu (2): Für $k = i + 1$ und $\ell = j$ ist man in $(*)$ im Fall $k \geq i$ und $\ell \geq j$ und somit gilt $a_{ii}^{(ij)} = a_{i+1,i} = 0$, wobei die letzte Gleichungen gilt, da A eine obere Dreiecksmatrix ist und offensichtlich $i + 1 > i$ gilt. Damit ist auch (2) nachgewiesen.

Wie oben erklärt, folgt somit $\det(A_{ij}) = 0$ für $i < j$ und somit $c_{ij} = 0$ für $i < j$. Also ist die Komatrix von A eine untere Dreiecksmatrix. $\square$