

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4 auf Blatt 2

(a) *Behauptung:*

(i) Auf $\mathbb{Z}$ wird durch

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{Z} : (5c \leq a < 5(c+1) \ \& \ 5c \leq b < 5(c+1)) \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

(ii) Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$ verträgt sich nicht mit der Äquivalenzrel. $\sim$.

Beweis:

(i) Wir weisen Reflexivität, Symmetrie und Transitivität nach:

Reflexivität: (Zu zeigen: $\forall a \in \mathbb{Z} : a \sim a$)

Sei $a \in \mathbb{Z}$ gegeben. Sei $x \in \mathbb{Z}$ die größte durch 5 teilbare Zahl, die kleiner gleich a ist (wir verwenden hier ohne Beweis, dass es eine solche gibt). Da x durch 5 teilbar ist, gibt es $c \in \mathbb{Z}$ mit $x = 5c$. Es gilt dann $5c = x \leq a$, da x nach Wahl kleiner gleich a ist. Außerdem gilt $5(c+1) > a$, denn ansonsten wäre $5c$ nicht die größte durch 5 teilbare Zahl kleiner gleich a . Somit gilt $5c \leq a < 5(c+1)$. Dann gilt natürlich auch $5c \leq a < 5(c+1) \ \& \ 5c \leq a < 5(c+1)$, was genau $a \sim a$ bedeutet.

Da $a \in \mathbb{Z}$ beliebig war, ist damit die Reflexivität von $\sim$ nachgewiesen.

Symmetrie: (Zu zeigen: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \sim b \implies b \sim a$)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir nehmen an, dass $a \sim b$ gilt. Sei dann weiter $c \in \mathbb{Z}$ gegeben mit $(5c \leq a < 5(c+1) \ \& \ 5c \leq b < 5(c+1))$. Dann gilt natürlich auch $(5c \leq b < 5(c+1) \ \& \ 5c \leq a < 5(c+1))$. Also gilt $b \sim a$.

Da $a, b \in \mathbb{Z}$ beliebig waren, ist damit die Symmetrie von $\sim$ nachgewiesen.

Transitivität: (Zu zeigen: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \sim b \ \& \ b \sim c) \implies a \sim c$)

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir nehmen an, dass $a \sim b$ und $b \sim c$ gelten. Seien dann weiter $d, e \in \mathbb{Z}$ gegeben mit $(5d \leq a < 5(d+1) \ \& \ 5d \leq b < 5(d+1))$ und $(5e \leq b < 5(e+1) \ \& \ 5e \leq c < 5(e+1))$.

Wir zeigen, dass $d = e$ gilt, dann folgt $(5d \leq a < 5(d+1) \ \& \ 5d \leq c < 5(d+1))$ und somit $a \sim c$.

Wegen $5d \leq b < 5(d+1)$ lässt sich b schreiben als $b = 5d + m$ für ein bestimmtes $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Wegen $5e \leq b < 5(e+1)$ lässt sich b schreiben als $b = 5e + n$ für ein bestimmtes $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Gleichsetzen liefert

$$\begin{aligned} 5d + m &= 5e + n \\ \implies 5(d - e) &= n - m. \end{aligned}$$

Da die linke Seite offensichtlich durch 5 teilbar ist, ist auch $n - m$ durch 5 teilbar. Wegen $n, m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ gilt jedoch $n - m \in \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$. Die einzige durch 5 teilbare Zahl in diesem Bereich ist 0, also gilt $n - m = 0$ und somit auch $d - e = 0$. Also gilt $d = e$. Wie schon oben beschrieben folgt hieraus $a \sim c$.

Da $a, b, c \in \mathbb{Z}$ beliebig waren, ist damit die Transitivität von $\sim$ nachgewiesen.

Damit ist gezeigt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) (Zu zeigen: $\neg(\forall x, x' \in \mathbb{Z} : x \sim x' \implies f(x) = f(x'))$)

(Zu zeigen: $\exists x, x' \in \mathbb{Z} : \neg(x \sim x' \implies f(x) = f(x'))$)

(Zu zeigen: $\exists x, x' \in \mathbb{Z} : x \sim x' \ \& \ f(x) \neq f(x')$)

Setze $x := 0 \in \mathbb{Z}$ und $x' := 1 \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $5 \cdot 0 \leq x < 5 \cdot (0+1)$ und ebenso $5 \cdot 0 \leq x' < 5 \cdot (0+1)$. Also gilt $x \sim x'$. Andererseits gilt aber $f(x) = f(0) = 0^2 = 0$ und $f(x') = f(1) = 1^2 = 1$, also $f(x) \neq f(x')$.

□

(b) Behauptung:(i) Auf $\mathbb{Z}$ wird durch

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad a \in \{-b, b\} \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

(ii) Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$ verträgt sich mit der Äquivalenzrelation $\sim$.**Beweis:**

(i) Wir weisen Reflexivität, Symmetrie und Transitivität nach:

Reflexivität: (Zu zeigen: $\forall a \in \mathbb{Z} : a \sim a$)Sei $a \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wegen $a \in \{-a, a\}$ gilt $a \sim a$.Da $a \in \mathbb{Z}$ beliebig war, ist damit die Reflexivität von $\sim$ nachgewiesen.Symmetrie: (Zu zeigen: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \sim b \implies b \sim a$)Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir nehmen an, dass $a \sim b$ gilt. Dann gilt $a \in \{-b, b\}$.

Wir unterscheiden die beiden möglichen Fälle:

Falls $a = -b$, so gilt $b = -a$ und somit $b \in \{-a, a\}$. Also gilt $b \sim a$.Falls $a = b$, so gilt $b \in \{-b, b\}$. Also gilt $b \sim a$.In jedem Fall gilt also $b \sim a$.Da $a, b \in \mathbb{Z}$ beliebig waren, ist damit die Symmetrie von $\sim$ nachgewiesen.Transitivität: (Zu zeigen: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \sim b \& b \sim c) \implies a \sim c$)Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir nehmen an, dass $a \sim b$ und $b \sim c$ gelten. Dann gelten $a \in \{-b, b\}$ und $b \in \{-c, c\}$. Wir unterscheiden wieder alle möglichen Fälle:Falls $a = b$ gilt und $b = c$ gilt, so gilt $a = c$ und somit gilt $a \in \{-c, c\}$. Also gilt $a \sim c$.Falls $a = -b$ gilt und $b = c$ gilt, so gilt $a = -c$ und somit gilt $a \in \{-c, c\}$. Also gilt $a \sim c$.Falls $a = b$ gilt und $b = -c$ gilt, so gilt $a = -c$ und somit gilt $a \in \{-c, c\}$. Also gilt $a \sim c$.Falls $a = -b$ gilt und $b = -c$ gilt, so gilt $a = -(-c) = c$ und somit gilt $a \in \{-c, c\}$. Also gilt $a \sim c$.In jedem Fall gilt also $a \sim c$.Da $a, b, c \in \mathbb{Z}$ beliebig waren, ist damit die Transitivität von $\sim$ nachgewiesen.Damit ist gezeigt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.(ii) (Zu zeigen: $\forall x, x' \in \mathbb{Z} : x \sim x' \implies f(x) = f(x')$)Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir nehmen an, dass $a \sim b$ gilt. Dann gilt $a \in \{-b, b\}$.

Wir unterscheiden die beiden möglichen Fälle:

Falls $a = b$ gilt, so gilt $f(a) = f(b)$ ohne weiteres.Falls $a = -b$ gilt, so gilt $f(a) = a^2 = (-b)^2 = b^2 = f(b)$.In jedem Fall gilt also $f(a) = f(b)$.Da $a, b \in \mathbb{Z}$ beliebig waren. Ist damit die Behauptung gezeigt. □**(c) Behauptung:** Seien A, B, C Mengen mit $A \subseteq B$.(i) Auf C^B wird durch

$$f \sim g \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall x \in A : f(x) = g(x) \quad (f, g \in C^B)$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

(ii) Die Abbildung $\phi : C^B \rightarrow C^A, f \mapsto f|_A$ verträgt sich mit $\sim$. Für $C \neq \emptyset$ ist die induzierte Abbildung $\bar{\phi} : C^B / \sim \rightarrow C^A, \tilde{f} \mapsto f|_A$ aus dem Homomorphiesatz eine Bijektion.

- (iii) Für $C = \emptyset$ ist die Menge C^B leer, falls $B \neq \emptyset$ gilt und hat Mächtigkeit 1, falls $B = \emptyset$ gilt. Im ersten Fall sind $C^B / \sim$ und C^A genau dann in Bijektion, wenn $A \neq \emptyset$. Im zweiten Fall sind die Mengen $C^B / \sim$ und C^A in Bijektion (da beide einelementig sind).

Beweis:

- (i) Wir weisen Reflexivität, Symmetrie und Transitivität nach:

Reflexivität: (Zu zeigen: $\forall f \in C^B : f \sim f$)

Sei $f \in C^B$ gegeben. Da natürlich $f(x) = f(x)$ für alle $x \in A$ gilt, folgt $f \sim f$. Da $f \in C^B$ beliebig war, ist damit die Reflexivität von $\sim$ nachgewiesen.

Symmetrie: (Zu zeigen: $\forall f, g \in C^B : f \sim g \implies g \sim f$)

Seien $f, g \in C^B$ gegeben. Wir nehmen an, dass $f \sim g$ gilt. Also gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$. Dann gilt natürlich auch $g(x) = f(x)$ für alle $x \in A$. Also gilt $g \sim f$.

Da $f, g \in C^B$ beliebig waren, ist damit die Symmetrie von $\sim$ nachgewiesen.

Transitivität: (Zu zeigen: $\forall f, g, h \in C^A : (f \sim g \& g \sim h) \implies f \sim h$)

Seien $f, g, h \in C^B$ gegeben. Wir nehmen an, dass $f \sim g$ und $g \sim h$ gelten. Wir müssen zeigen, dass $f \sim h$ gilt. (Zu zeigen: $\forall x \in A : f(x) = h(x)$) Sei dazu $x \in A$ gegeben. Wegen $f \sim g$ gilt $f(x) = g(x)$. Wegen $g \sim h$ gilt $g(x) = h(x)$. Zusammen folgt $f(x) = h(x)$. Da $x \in A$ beliebig war, ist damit $f \sim h$ nachgewiesen.

Da $f, g, h \in C^B$ beliebig waren, ist damit die Transitivität von $\sim$ nachgewiesen.

Damit ist gezeigt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

- (ii) Verträglichkeit von ϕ mit $\sim$: (Zu zeigen: $\forall f, g \in C^B : f \sim g \implies \phi(f) = \phi(g)$)

Seien $f, g \in C^B$ gegeben. Wir nehmen an, dass $f \sim g$ gilt. Es ist $\phi(f) = f|_A : A \rightarrow C$ und $\phi(g) = g|_A : A \rightarrow C$. Wir müssen die Gleichheit dieser beiden Abbildungen nachweisen. Definitions- und Zielmenge sind offenkundig gleich, somit muss nur die Abbildungsvorschrift überprüft werden, d.h. es muss noch nachgewiesen werden, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$ gilt. Da dies gerade die Definition von $f \sim g$ ist, gilt es. Also gilt $\phi(f) = \phi(g)$.

Da $f, g \in C^B$ beliebig waren, ist damit die Verträglichkeit von ϕ mit $\sim$ nachgewiesen.

Nach dem Homomorphiesatz (Teil a)) existiert somit eine eindeutige Abbildung $\bar{\phi} : C^B / \sim \rightarrow C^A$ mit $\bar{\phi}(\tilde{f}) = \phi(f)$ für alle $f \in C^B$. Wir zeigen nun noch, dass diese bijektiv ist.

Injektivität von $\bar{\phi}$: Nach dem Homomorphiesatz (Teil b)) müssen wir zeigen, dass

$$\forall f, g \in C^B : f \sim g \iff \phi(f) = \phi(g)$$

gilt. Seien dazu $f, g \in C^B$ gegeben. Die Implikation $\Rightarrow$ wurde schon oben gezeigt. Für den Nachweis der umgekehrten Implikation nehmen wir an, dass $\phi(f) = \phi(g)$ gilt. Dies bedeutet, dass die Abbildungen $f|_A$ und $g|_A$ gleich sind. Insbesondere folgt hieraus, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$ gilt. Also gilt $f \sim g$.

Surjektivität von $\bar{\phi}$: Nach dem Homomorphiesatz (Teil c)) müssen wir zeigen, dass die Abbildung $\phi : C^B \rightarrow C^A$ surjektiv ist. Also müssen wir zeigen, dass

$$\forall f \in C^A \exists g \in C^B : f = \phi(g)$$

gilt. Sei dazu $f \in C^A$ gegeben. Wähle ein $c \in C$ (dies geht, da $C \neq \emptyset$ gilt). Definiere nun $g : B \rightarrow C$ durch

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ c & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Definition von g gilt $g(x) = f(x)$ für alle $x \in A$. Deshalb gilt $\phi(g) = g|_A = f$ (Definitionsmenge beider Abbildungen ist A und Zielmenge C).

Damit ist nachgewiesen, dass $\bar{\phi}$ bijektiv (injektiv und surjektiv) ist.

- (iii) Hier ist der Text in der Behauptung gleichzeitig schon der Beweis, wenn man sich erinnert, dass es einerseits für jede Menge Y genau eine Abbildung $\emptyset \rightarrow Y$ gibt und andererseits für eine nichtleere Menge X *keine* Abbildung $X \rightarrow \emptyset$.

□