Blatt 3, Aufgabe 3

Erinnerung zum kartesischen Produkt: Ist I eine Menge und ist für jedes $i \in I$ eine weitere Menge G_i gegeben, so ist das kartesische Produkt $\prod_{i\in I} G_i$ diejenige Menge, deren Elemente genau alle Abbildungen $b : I \to \bigcup_{i\in I} G_i$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $b(i) \in G_i$ für alle $i \in I$ gilt („der i-te Eintrag $b(i)$ des Tupels b kommt aus G_i“), sind.

Eine alternative Schreibweise für die Elemente von $\prod_{i\in I} G_i$ ist die Tupelschreibweise $(b_i)_{i\in I}$. Dabei bezeichnet ein solches Tupel $(b_i)_{i\in I}$ die Abbildung $b : I \to \bigcup_{i\in I} G_i$, $i \mapsto b_i$. Schreibt man $(b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$, so ist dabei automatisch die Bedingung $b_i \in G_i$ für alle $i \in I$ mitzulesen.

Unten sind zwei Lösungen der Aufgabe angegeben, die sich aber lediglich in der verwendeten Schreibweise unterscheiden. Die erste Lösung verwendet die Tupelschreibweise, die zweite die Abbildungsschreibweise. Sie sollten üben, beide Schreibweisen flüssig verwenden zu können.

Lösung in Tupelschreibweise (Wie in der Plenumsübung vorgerechnet.)

Voraussetzung: I ist eine Menge. Für jedes $i \in I$ ist $(G_i, +_i)$ eine abelsche Gruppe.

Behauptung: Das kartesische Produkt $\prod_{i\in I} G_i$ wird durch die Verknüpfung

$$+ : \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i \to \prod_{i\in I} G_i\,, \quad \big((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}\big) \mapsto (a_i +_i b_i)_{i\in I}$$

wieder zu einer abelschen Gruppe. Genauer gelten dabei:

- Das neutrale Element ist die „Nulltupel“ $(0_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$, wobei für jedes $i \in I$ mit $0_i \in G_i$ das neutrale Element von $(G_i, +_i)$ gemeint ist.
- Das zu einem Element $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$, inverse Element ist $-(a_i)_{i\in I} = (-_i a_i)_{i\in I}$.

Beweis: Wir weisen die vier Axiome einer abelschen Gruppe nach.

(K) (Zu zeigen: $\forall a, b, \in G : \; a + b = b + a$)

Seien $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ gegeben. Dann gilt

$$(a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I} \overset{\text{Def.}+}{=} (a_i +_i b_i)_{i\in I} \overset{\text{(K) in } G_i}{=} (b_i +_i a_i)_{i\in I} \overset{\text{Def.}+}{=} (b_i)_{i\in I} + (a_i)_{i\in I}\,.$$

Da $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ beliebig waren, ist damit die Kommutativität der Verknüpfung $+$ nachgewiesen.

(A) (Zu zeigen: $\forall a, b, c \in G : \; a + (b + c) = (a + b) + c$)

Seien $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(a_i)_{i\in I} + \big((b_i)_{i\in I} + (c_i)_{i\in I}\big) &\overset{\text{Def.}+}{=} (a_i)_{i\in I} + (b_i +_i c_i)_{i\in I} \\
&\overset{\text{Def.}+}{=} (a_i +_i (b_i +_i c_i))_{i\in I} \\
&\overset{\text{(A) in } G_i}{=} ((a_i +_i b_i) +_i c_i)_{i\in I} \\
&\overset{\text{Def.}+}{=} (a_i +_i b_i)_{i\in I} + (c_i)_{i\in I} \\
&\overset{\text{Def.}+}{=} \big((a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I}\big) + (c_i)_{i\in I}
\end{aligned}$$

Da $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ beliebig waren, ist damit die Assoziativität der Verknüpfung $+$ nachgewiesen.

(N) (Zu zeigen: $\exists e \in G : \forall a \in G : a + e = a$)

Definiere $e := (0_i)_{i\in I}$, wobei für jedes $i \in I$ mit $0_i \in G_i$ das neutrale Element von $(G_i, +_i)$ gemeint ist. Sei weiter $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ gegeben. Dann gilt

$$(a_i)_{i\in I} + e \overset{\text{Def. } e}{=} (a_i)_{i\in I} + (0_i)_{i\in I} \overset{\text{Def. } +}{=} (a_i +_i 0_i)_{i\in I} \overset{\text{(N) in } G_i}{=} (a_i)_{i\in I}\,.$$

Da $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ beliebig war, ist damit die Neutralelementexistenz von $+$ nachgewiesen.

(I) (Zu zeigen: $\forall a \in G : \exists b \in G : a + b = e$)

Sei $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ gegeben. Definiere $(b_i)_{i\in I} := (-_i a_i)_{i\in I}$. Dann gilt

$$(a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I} \overset{\text{Def. } b_i}{=} (a_i)_{i\in I} + (-_i a_i)_{i\in I} \overset{\text{Def. } +}{=} (a_i +_i (-_i a_i))_{i\in I} \overset{\text{(I) in } G_i}{=} (0_i)_{i\in I} = e\,.$$

Da $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ beliebig war, ist damit die Inversenexistenz von $+$ nachgewiesen.

Damit ist nachgewiesen, dass alle Axiome einer abelschen Gruppe für $(\prod_{i\in I} G_i, +)$ gelten. $\square$

Lösung in Abbildungsschreibweise

Voraussetzung: I ist eine Menge. Für jedes $i \in I$ ist $(G_i, +_i)$ eine abelsche Gruppe.

Behauptung: Das kartesische Produkt $\prod_{i\in I} G_i$ wird durch die Verknüpfung

$$+ : \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i \to \prod_{i\in I} G_i\,, \quad (g,h) \mapsto (i \mapsto g(i) +_i h(i))$$

wieder zu einer abelschen Gruppe. Genauer gelten dabei:

- Das neutrale Element ist die „Nullabbildung“ $0 : I \to \bigcup_{i\in I} G_i, i \mapsto 0_i$, wobei für jedes $i \in I$ mit $0_i \in G_i$ das neutrale Element von $(G_i, +_i)$ gemeint ist.
- Das zu einem Element $g : I \to \bigcup_{i\in I} G_i$, $i \mapsto g(i)$ inverse Element ist die Abbildung $-g : I \to \bigcup_{i\in I} G_i$, $i \mapsto -_i g(i)$

Beweis: Wir weisen die vier Axiome einer abelschen Gruppe nach.

(K) (Zu zeigen: $\forall a, b, \in G :\ a + b = b + a$)

Seien $g, h \in \prod_{i\in I} G_i$ gegeben. Nach Definition der Addition in $\prod_{i\in I} G_i$ ist $g + h$ die Abbildung $g + h : I \to \bigcup_{i\in I} G_i$, $i \mapsto g(i) +_i h(i)$ und $h + g$ die Abbildung $h + g : I \to \bigcup_{i\in I} G_i$, $i \mapsto h(i) +_i g(i)$. Wir wollen die Gleichheit der beiden Abbildungen $g+h$ und $h+g$ nachweisen. Beide Abbildungen haben offensichtlich dieselbe Definitionsmenge und dieselbe Zielmenge. Es bleibt noch nachzuprüfen, dass auch die Zuordnungen dieselben sind. Sei dazu $i \in I$ gegeben. Da $(G_i, +_i)$ nach Voraussetzung eine abelsche Gruppe ist, gilt

$$(g + h)(i) = g(i) +_i h(i) \overset{\text{(A) in } G_i}{=} h(i) +_i g(i) = (h + g)(i)\,.$$

Damit ist gezeigt, dass $g + h = h + g$ gilt. Da $g, h \in \prod_{i\in I} G_i$ beliebig waren, ist damit (K) nachgewiesen.

(A) (Zu zeigen: $\forall a, b, c \in G :\ a + (b + c) = (a + b) + c$)

Seien $f, g, h \in \prod_{i\in I} G_i$ gegeben. Nach Definition der Addition in $\prod_{i\in I} G_i$ ist $f + (g + h)$ die Abbildung $f + (g + h) : I \to \bigcup_{i\in I} G_i, i \mapsto f(i) +_i (g + h)(i)$ und $(f + g) + h$ die Abbildung $f + (g + h) : I \to \bigcup_{i\in I} G_i, i \mapsto (f + g)(i) +_i h(i)$. Wir wollen die Gleichheit der beiden Abbildungen $f + (g + h)$ und $(f + g) + h$ nachweisen. Definitions- und Zielmengen der beiden Abbildungen sind wieder offensichtlich identisch. Um die Gleichheit der Zuordnung nachzuprüfen, sei $i \in I$ gegeben. Dann rechnen wir

$$\begin{aligned}
(f + (g + h))(i) &= f(i) +_i (g + h)(i) \\
&= f(i) +_i (g(i) +_i h(i)) \\
&\overset{\text{(A) in } G_i}{=} (f(i) +_i g(i)) +_i h(i)) \\
&= (f + g)(i) +_i h(i) \\
&= ((f + g) + h)(i)\,.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $f + (g + h) = (f + g) + h$ gilt. Da $f, g, h \in \prod_{i\in I} G_i$ beliebig waren, ist damit (A) nachgewiesen.

(N) (Zu zeigen: $\exists e \in G : \forall a \in G : a + e = a$)

Definiere $e := 0 : I \to \bigcup_{i \in I} G_i,\ i \mapsto 0_i$. Da $0_i \in G_i$ gilt für jedes $i \in i$, gilt $e \in \prod_{i \in I} G_i$. Sei weiter $g \in \prod_{i \in I} G_i$ gegeben. Nach Definition der Addition in $\prod_{i \in I} G_i$ ist $g + e$ die Abbildung $g + e : I \to \bigcup_{i \in I} G_i,\ i \mapsto g(i) +_i e(i)$. Wir wollen die Gleichheit der beiden Abbildungen $g + e$ und g nachweisen. Definitions- und Zielmenge der beiden Abbildungen sind wieder offensichtlich gleich. Um die Gleichheit der Zuordnung nachzuprüfen, sei $i \in I$ gegeben. Wegen $e(i) = 0_i$ folgt

$$(g + e)(i) = g(i) +_i e(i) = g(i) +_i 0_i \overset{\text{(N) in } G_i}{=} g(i)\,.$$

Damit ist gezeigt, dass $g + e = g$ gilt. Da $g \in \prod_{i \in I}$ beliebig war, ist damit (N) nachwiesen.

(I) (Zu zeigen: $\forall a \in G : \exists b \in G : a + b = e$)

Sei $g \in \prod_{i \in I} G_i$ gegeben. Definiere $h : I \to \bigcup_{i \in I} G_i,\ i \mapsto -_i g(i)$. Wegen $-_i g(i) \in G_i$ für alle $i \in I$ gilt $h \in \prod_{i \in I}$. Wir wollen die Gleihheit der beiden Abbildungen $g + h$ und e nachweisen, wobei e in im Nachweise von (N) definiert sei. Definitions- und Zielmenge der beiden Abbildungen sind wieder offensichtlich gleich. Um die Gleichheit der Zuordnung nachzuprüfen, sei $i \in I$ gegeben. Dann gilt

$$(g + h)(i) = g(i) +_i h(i) = g(i) +_i (-_i g(i)) \overset{\text{(I) in } G_i}{=} 0_i = e(i)\,.$$

Damit ist gezeigt, dass $g + h = e$ gilt. Da $g \in \prod_{i \in I} G_i$ beliebig war, ist damit (I) nachgewiesen.

Damit ist nachgewiesen, dass alle Axiome einer abelschen Gruppe für $(\prod_{i \in I} G_i, +)$ gelten. $\square$