Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4 auf Blatt 4

Voraussetzung: Y ist eine Menge und $X \subseteq Y$ eine Teilmenge.

Behauptung:

(i) $G_X := (\mathcal{P}(X), \Delta)$ ist eine Untergruppe von $G_Y := (\mathcal{P}(Y), \Delta)$.
(ii) $G_Y / G_X \simeq G_{Y \setminus X}$ (Isomorphie abelscher Gruppen).

Beweis:

(i) Wir verwenden Proposition 2.2.2 um zu zeigen, dass G_X eine Untergruppe von G_Y ist. Dazu prüfen wir alle Voraussetzungen dieser Proposition nach.

Bei dieser Teilaufgabe ist es vor allem sehr wichtig, sich nochmals genau klar zu machen, wie die Gruppenstruktur auf G_Y „funktioniert", d.h. was die Addition bedeutet, was das neutrale Element ist und was die Inversen sind.

<u>$\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$:</u> (Zu zeigen: $\forall A \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathcal{P}(Y)$)

Sei $A \in \mathcal{P}(X)$ gegeben. Dann ist A also eine Teilmenge von X. Da X Teilmenge von Y ist, ist damit A auch eine Teilmenge von Y. Genauer gilt: Gilt $x \in A$, so folgt aus $A \subseteq X$ zunächst, dass auch $x \in X$ gilt, und dann weiter aus $X \subseteq Y$, dass auch $x \in Y$ gilt. Also gilt $(\forall x \in A : x \in Y)$, d.h. $A \subseteq Y$, d.h. $A \in \mathcal{P}(Y)$.

<u>$0_{G_Y} \in \mathcal{P}(X)$:</u>

Neutrales Element in der abelschen Gruppe $(\mathcal{P}(Y), \Delta)$ ist die leere Menge $\emptyset \in \mathcal{P}(Y)$ (denn $A \Delta \emptyset = A$ gilt für jedes $A \in \mathcal{P}(Y)$). Es gilt also $0_{G_Y} = \emptyset$. Da $\emptyset$ Teilmenge jeder Menge ist, gilt insbesondere $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$. Also gilt $0_{G_Y} = \emptyset \in \mathcal{P}(X)$.

<u>$\forall A, B \in \mathcal{P}(X) : A \Delta B \in \mathcal{P}(X)$:</u>

Seien $A, B \in \mathcal{P}(X)$ gegeben. Wir müssen nachweisen, dass $A \Delta B \in \mathcal{P}(X)$ gilt, also $A \Delta B \subseteq X$ gilt. Dies bedeutet genauer, dass $(\forall x \in A \Delta B : x \in X)$ gilt. Sei dazu $x \in A \Delta B$ gegeben. Nach Definition der symmetrischen Differenz gilt dann

$$x \in A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,.$$

Also gilt $x \in A \setminus B$ oder $x \in B \setminus A$. Falls $x \in A \setminus B$ gilt, so gilt insbesondere $x \in A$ und somit wegen $A \subseteq X$ auch $x \in X$. Falls $x \in B \setminus A$ gilt, so gilt insbesondere $x \in B$ und somit wegen $B \subseteq X$ auch $x \in X$. In jedem Fall gilt also $x \in X$. Da $x \in A \Delta B$ beliebig war, ist damit $A \Delta B \subseteq X$ und somit $A \Delta B \in \mathcal{P}(X)$ nachgewiesen. Da $A, B \in \mathcal{P}(X)$ beliebig waren, ist damit die zu zeigende Behauptung nachgewiesen.

<u>$\forall A \in \mathcal{P}(X) : -_{G_Y} A \in \mathcal{P}(X)$:</u>

In der abelschen Gruppe $(\mathcal{P}(Y), \Delta)$ ist jedes Element selbstinvers, d.h. es gilt $-_{G_Y} A = A$ für alle $A \in \mathcal{P}(Y)$ (denn $A \Delta A = \emptyset = 0_{G_Y}$ gilt für jedes $A \in \mathcal{P}(Y)$). Ist nun $A \in \mathcal{P}(X)$ gegeben, so gilt deshalb offensichtlicherweise $-_{G_Y} A = A \in \mathcal{P}(X)$.

Damit sind alle Voraussetzungen von Proposition 2.2.2 nachgewiesen und es folgt aus dieser Proposition, dass G_X eine Untergruppe von G_Y ist.

(ii) Um zu zeigen, dass die abelschen Gruppen G_Y/G_X und $G_{Y\setminus X}$ zueinander isomorph sind, geben wir konkret einen Isomorphismus zwischen diesen an. Dazu definieren wir zunächst eine (geeignete) Abbildung $f : G_Y \to G_{Y\setminus X}$, auf welche wir dann den Homomorphiesatz für abelsche Gruppen (Satz 2.3.11) anwenden.

Konkret definieren wir die Abbildung $f : G_Y \to G_{Y\setminus X}$, $A \mapsto f(A)$ durch

$$f(A) := A \setminus X = \{x \in A \mid x \notin X\}\,.$$

Dies ist einfach die vermutlich naheliegendste Art, wie man aus einer Teilmenge von Y eine Teilmenge von $Y \setminus X$ machen kann: Man „entferne“ einfach all diejenigen Elemente, die in X liegen. Dass diese Abbildung den gewünschten Zweck erfüllt, muss nun natürlich noch nachgeprüft werden.

Beachte zunächst, dass die Abbildung f wegen $A \setminus X \subseteq Y \setminus X$ (sofern $A \subseteq X$) in der Tat nach $G_{Y\setminus X}$ abbildet, also korrekt definiert ist. Wir wollen nun den Homomorphiesatz für abelsche Gruppen (Satz 2.3.11) auf f anwenden. Dazu müssen wir dessen Voraussetzungen prüfen:

- f ist ein Homomorphismus von abelschen Gruppen.
- Es gilt $G_X \subseteq \ker f$.

Aus Teil (a) des Homomorphiesatzes für abelsche Gruppen folgt dann, dass es eine eindeutige Abbildung $\overline{f} : G_Y/G_X \to G_{Y\setminus X}$ mit $\overline{f}(\overline{A}) = f(A)$ für alle $A \in G_Y$ gibt und dass $\overline{f}$ wieder ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist.

<u>f ist ein Homomorphismus abelscher Gruppen:</u>

(Zu zeigen: $\forall A, B \in G_Y : f(A\Delta B) = f(A)\Delta f(B)$)

Seien dazu $A, B \in G_Y$ gegeben. Um zu zeigen, dass die beiden Mengen $f(A\Delta B)$ und $f(A)\Delta f(B)$ gleich sind, müssen wir nachweisen, dass sie dieselben Elemente enthalten. Dazu überlegen wir uns zunächst genauer, was es bedeutet, dass ein Element von $Y\setminus X$ Element von $f(A\Delta B)$ bzw. Element von $f(A)\Delta f(B)$ ist. Sei dazu $x \in Y \setminus X$ gegeben. Dann gilt einerseits: (behalte im Kopf, dass $x \in Y \setminus X$ und somit $x \notin X$ gilt)

$$\begin{aligned}
& x \in f(A\Delta B) = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus X \\
\iff\ & x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ und } x \notin X \\
\overset{x\notin X}{\iff}\ & x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
\iff\ & (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ oder } (x \in B \text{ und } x \notin A)\,. \qquad (*)
\end{aligned}$$

(Machen Sie sich wirklich jeden einzelnen der obigen Schritte klar. Beachten Sie, dass man die Bedingung $x \notin X$ jederzeit dazufügen oder auch weglassen kann, da sie nach der Voraussetzung $x \in Y \setminus X$ stets erfüllt ist.)

Andererseits gilt: (behalte wieder im Kopf, dass $x \in Y \setminus X$ und somit $x \notin X$ gilt)

$$\begin{aligned}
& x \in f(A)\Delta f(B) = (f(A) \setminus f(B)) \cup (f(B) \setminus f(A)) \\
\iff\ & x \in f(A) \setminus f(B) \text{ oder } x \in f(B) \setminus f(A) \\
\iff\ & (x \in f(A) \text{ und } x \notin f(B)) \text{ oder } (x \in f(B) \text{ und } x \notin f(A)) \\
\overset{\text{Def. von } f}{\iff}\ & (x \in A \setminus X \text{ und } x \notin B \setminus X) \text{ oder } (x \in B \setminus X \text{ und } x \notin A \setminus X) \\
\iff\ & (x \in A \text{ und } x \notin X \text{ und } x \notin B \setminus X) \text{ oder } (x \in B \text{ und } x \notin X \text{ und } x \notin A \setminus X) \\
\overset{x\notin X}{\iff}\ & (x \in A \text{ und } x \notin B \setminus X) \text{ oder } (x \in B \text{ und } x \notin A \setminus X)\,. \qquad (**)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle überlegen wir uns kurz, dass für $x \in Y \setminus X$ gilt:

$$\begin{aligned} & x \in B \setminus X \quad \Longleftrightarrow \quad x \in B \text{ und } x \notin X \quad \overset{x \notin X}{\Longleftrightarrow} \quad x \in B\,. \\ \text{Deshalb:} \quad & x \notin B \setminus X \quad \Longleftrightarrow \quad x \notin B \qquad\qquad (***) \end{aligned}$$

Damit gilt dann weiter (beachte immer noch $x \in Y \setminus X$)

$$\begin{aligned} & x \in f(A)\Delta f(B) \\ \overset{(**)}{\Longleftrightarrow} \quad & (x \in A \text{ und } x \notin B \setminus X) \text{ oder } (x \in B \text{ und } \text{ und } x \notin A \setminus X) \\ \overset{(***)}{\Longleftrightarrow} \quad & (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ oder } (x \in B \text{ und } x \notin A) \\ \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad & x \in f(A\Delta B)\,. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass ein Element von $Y \setminus X$ genau dann Element von $f(A)\Delta f(B)$ ist, wenn es Element von $f(A\Delta B)$ ist. Das bedeutet aber gerade, dass die (Mengen-) Gleichheit $f(A\Delta B) = f(A)\Delta f(B)$ gilt. Da $A, B \in G_Y$ beliebig waren, ist damit nachgewiesen, dass f ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist.

<u>Es gilt $G_X \subseteq \ker f$:</u> (Zu zeigen: $\forall A \in G_X : A \in \ker f$)

Sei dazu $A \in G_X$ gegeben, d.h. A ist eine Teilmenge von X. Nach Definition des Kerns gilt $\ker f = \{B \in G_Y : f(B) = 0_{G_{Y\setminus X}} = \emptyset\}$. Wir müssen also zeigen, dass $f(A) = \emptyset$ gilt. Nach Definition von f gilt $f(A) = A \setminus X$. Wegen $A \subseteq X$ ist jedes Element von A auch Element von X, also gilt in der Tat $f(A) = A \setminus X = \emptyset$.

Damit sind die Voraussetzungen des Homomorphiesatzes für abelsche Gruppen nachgewiesen. Es folgt (aus Teil (a) des Satzes), dass es eine eindeutige Abbildung $\overline{f} : G_Y/G_X \to G_{Y\setminus X}$ mit $\overline{f}(\overline{A}) = f(A)$ für alle $A \in G_Y$ gibt und dass diese Abbildung $\overline{f}$ wieder ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist.

Wir zeigen nun noch, dass diese Abbildung $\overline{f}$ bijektiv (also injektiv und surjektiv) und somit ein Isomorphismus ist. Zum Nachweis der Injektivität und Surjektivität verwenden wir wiederum den Homomorphiesatz (Teil (b) und (c)) und zeigen:

- $G_X = \ker f$ (nach Teil (b) gilt dann, dass $\overline{f}$ injektiv ist)
- f ist surjektiv (nach Teil (c) gilt dann, dass auch $\overline{f}$ surjektiv ist)

<u>Es gilt $G_X = \ker f$:</u> (Zu zeigen: $G_X \subseteq \ker f$ und $\ker f \subseteq G_X$)

Es wurde zuvor schon gezeigt, dass $G_X \subseteq \ker f$ gilt. Also ist nur noch die Inklusion $\ker f \subseteq G_X$ zu zeigen. (Zu zeigen: $\forall A \in \ker f : A \in G_X$) Sei dazu $A \in \ker f$ gegeben. Wir wollen zeigen, dass $A \in G_X$ gilt, d.h., dass $A \subseteq X$ gilt. Wegen

$$A \in \ker f = \{B \in G_Y \mid f(B) = 0_{G_{Y\setminus X}} (= \emptyset)\}$$

gilt also $\emptyset = f(A) = A \setminus X$. Also ist die Menge $A \setminus X$ leer, was gerade bedeutet, dass jedes Element von A auch Element von X ist. Dies bedeutet aber gerade, dass $A \subseteq X$ gilt.

<u>f ist surjektiv:</u> (Zu zeigen: $\forall B \in G_{Y\setminus X} : \exists A \in G_Y : f(A) = B$)

Sei $B \in G_{Y\setminus X}$ gegeben, d.h. es gilt $B \subseteq Y \setminus X$. Insbesondere gilt dann auch $B \subseteq Y$. Definiere nun $A := B$. Dann gilt $A \in G_Y$ (denn A ist eine Teilmenge von Y) und

$$f(A) = A \setminus X = B \setminus X = B\,,$$

denn wegen $B \subseteq Y \setminus X$ ist kein Element von B Element von X und damit $B \setminus X = B$. Damit ist gezeigt, dass f surjektiv ist.

Aus dem Homomorphiesatz Teil (b) und (c) folgt nun, dass $\overline{f}$ bijektiv ist und somit ein Isomorphismus abelscher Gruppen. $\square$