Lösungsvorschlag für Aufgabe 3 auf Blatt 7 (und die Zusatzaufgabe)

Voraussetzung: Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ gegeben.

Behauptung:

(a) Gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = 0$, so gibt es auch ein $x \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = 0$.

(b) Gibt es ein $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = 0$, so gibt es auch ein $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = 0$.

Zusammenfassung von Aussagen über homogene lineare Gleichungssysteme:

Sei K ein beliebiger Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in K^{m\times n}$.

- Angenommen B ist in reduzierter Stufenform. Dann folgt aus Bemerkung 5.1.12 (oder Satz 5.3.2), dass folgende Aussagen äquivalent sind:
  - *(i)* $\ker B = \{0\}$
  - *(ii)* Es gilt $m \geq n$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, wobei der obere Teil quadratisch von Größe $n \times n$ ist (mit allen nicht eingetragenen Einträgen gleich 0) und der untere Teil die Höhe $m - n \geq 0$ hat.
  - *(iii)* B hat keine fehlende Stufe.
  - *(iv)* Alle Unbekannten des linearen Gleichungssystems $Bx = 0$ sind abhängig.
- Für zwei Matrizen $A, B \in K^{m\times n}$ sind nach Satz 5.3.2 äquivalent:
  - *(i)* A und B können durch Zeilentransformationen ineinander übergeführt werden.
  - *(ii)* $\ker A = \ker B$.

Beweis. Um zwischen Überlegungen in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ zu unterscheiden, führen wir folgende Notationen und Sprechweisen ein:

- Wir setzen

$$\begin{aligned} \ker_{\mathbb{Q}} A &:= \{x \in \mathbb{Q}^n \mid Ax = 0\}, \\ \ker_{\mathbb{R}} A &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}, \\ \ker_{\mathbb{C}} A &:= \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = 0\}. \end{aligned}$$

- Eine Zeilentransformation, bei welcher mit einer *rationalen* Zahl multipliziert wird oder ein *rationales* Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert wird, nennen wir eine $\mathbb{Q}$-Zeilentransformation. Analog sprechen wir von $\mathbb{R}$-Zeilentransformationen und $\mathbb{C}$-Zeilentransformationen. Wegen $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ (als Teilkörper, d.h. Addition und Multiplikation sind „dasselbe“) ist jede $\mathbb{Q}$-Zeilentransformation auch eine $\mathbb{R}$-Zeilentransformation und jede $\mathbb{R}$-Zeilentransformation auch eine $\mathbb{C}$-Zeilentransformation (umgekehrt natürlich im Allgemeinen nicht).

Man beachte zudem, dass man bezüglich des Begriffes der reduzierten Stufenform nicht zwischen $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ unterscheiden muss, denn wegen $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ (als Teilkörper) sind 0 und 1 in allen drei Ringen identisch.

Nun beweisen wir die beiden Teile (1) und (2).

(1) Nach Voraussetzung gilt $\ker_{\mathbb{R}} A \neq \{0\}$ und wir wollen zeigen, dass $\ker_{\mathbb{Q}} A \neq \{0\}$ gilt.

Wegen $A \in \mathbb{Z}^{m\times n} \subseteq \mathbb{Q}^{m\times n}$ und da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, gibt es nach dem Gauß-Algorithmus 5.2.3 eine Matrix $\widetilde{A} \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ in reduzierter Stufenform ist, die aus A durch elementare $\mathbb{Q}$-Zeilentransformation hervorgeht. Nach Satz 5.3.2 (mit $K = \mathbb{Q}$) gilt dann $\ker_{\mathbb{Q}} A = \ker_{\mathbb{Q}} \widetilde{A}$. Da jede $\mathbb{Q}$-Zeilentransformation auch eine $\mathbb{R}$-Zeilentransformation ist, gilt nach Satz 5.3.2 (diesmal mit $K = \mathbb{R}$) auch $\ker_{\mathbb{R}} A = \ker_{\mathbb{R}} \widetilde{A}$. Also gilt $\ker_{\mathbb{R}} \widetilde{A} \neq \{0\}$. Da $\widetilde{A}$ in reduzierter Stufenform ist, muss $\widetilde{A}$ nach den Vorüberlegungen vor dem Beweis oder Bemerkung 5.1.12 im Skript (für $K = \mathbb{R}$) mindestens eine fehlende Stufe haben. Dann gilt aber auch $\ker_{\mathbb{Q}} \widetilde{A} \neq \{0\}$, wiederum nach diesen Vorüberlegungen oder Bemerkung 5.1.12 im Skript (diesmal für $K = \mathbb{Q}$). Also folgt $\ker_{\mathbb{Q}} A = \ker_{\mathbb{Q}} \widetilde{A} \neq \{0\}$.

(2) Nach Voraussetzung gilt $\ker_{\mathbb{C}} A \neq \{0\}$. Wie in Teil (1) folgt zunächst, dass dann auch $\ker_{\mathbb{Q}} A \neq \{0\}$ gilt (man ersetze dort einfach überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$). Sei konkret $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \ker_{\mathbb{Q}} A \setminus \{0\}$ gegeben. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ schreibe $x_i = \frac{a_i}{b_i}$ mit gewissen $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{N}$. Definiere nun

$$y := b_1 \cdots b_n \cdot x = \big(a_1 b_2 \cdots b_n, b_1 a_2 b_3 b_4 \cdots b_n, \ldots, b_1 \cdots b_{n-1} a_n\big)\,.$$

Dann gilt $y \in \mathbb{Z}^n$ und $Ay = b_1 \cdots b_n \cdot Ax = 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

□

Beweis der Zusatzaufgabe. Um zwischen Überlegungen in L und in K zu unterscheiden, führen wir folgende Notationen und Sprechweisen ein:

- Wir setzen

$$\ker_K A := \{x \in K^n \mid Ax = 0\}\,,$$
$$\ker_L A := \{x \in L^n \mid Ax = 0\}\,.$$

- Eine Zeilentransformation, bei welcher mit einem Element aus K multipliziert wird oder ein „K-Vielfaches“ einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert wird, nennen wir eine K-Zeilentransformation. Analog sprechen wir von L-Zeilentransformationen. Wegen $K \subseteq L$ (als Teilkörper, d.h. Addition und Multiplikation sind „dasselbe“) ist jede K-Zeilentransformation auch eine L-Zeilentransformation (umgekehrt natürlich im Allgemeinen nicht).

Man beachte zudem, dass man bezüglich des Begriffes der reduzierten Stufenform nicht zwischen K und L unterscheiden muss, da $0_K = 0_L$ und $1_K = 1_L$ gilt (denn $K \subseteq L$ ist ein Teilkörper).

Nun zum Beweis der Aussage: Nach Voraussetzung gilt $\ker_L A \neq \{0\}$ und wir wollen zeigen, dass $\ker_K A \neq \{0\}$ gilt. Wegen $A \in K^{m\times n}$ und da K selbst ein Körper ist, gibt es nach dem Gauß-Algorithmus 5.2.3 eine Matrix $\widetilde{A} \in K^{m\times n}$, die in reduzierter Stufenform ist und aus A durch elementare K-Zeilentransformation hervorgeht. Nach Satz 5.3.2 (mit K als Körper) gilt dann $\ker_K A = \ker_K \widetilde{A}$. Da jede K-Zeilentransformation auch eine L-Zeilentransformation ist, gilt nach Satz 5.3.2 (diesmal mit Körper L) auch $\ker_L A = \ker_L \widetilde{A}$. Also gilt $\ker_L \widetilde{A} \neq \{0\}$. Da $\widetilde{A}$ in reduzierter Stufenform ist, muss $\widetilde{A}$ nach den Vorüberlegungen vor dem Beweis oder Bemerkung 5.1.12 im Skript (für den Körper L) mindestens eine fehlende Stufe haben. Dann gilt aber auch $\ker_K \widetilde{A} \neq \{0\}$, wiederum nach diesen Vorüberlegungen oder Bemerkung 5.1.12 im Skript (diesmal für den Körper K). Also folgt $\ker_K A = \ker_K \widetilde{A} \neq \{0\}$. □