Lösungsvorschlag für Aufgabe 3 auf Blatt 8 (und die Zusatzaufgabe)

Voraussetzung: Es seien $\ell, m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $A \in K^{\ell \times n}$ und $B \in K^{m \times n}$.
Behauptung: Es gelten:

(a) $\ker(A) \subseteq \ker(B) \iff \mathrm{row}(A) \supseteq \mathrm{row}(B)$
(b) $\ker(A) \subseteq \mathrm{row}(B) \iff \mathrm{row}(A) \supseteq \ker(B)$
(c) $\mathrm{row}(A) \subseteq \ker(B) \iff \ker(A) \supseteq \mathrm{row}(B)$

Beweis. Wir werden über Dualität argumentieren und dabei folgende Aussagen verwenden:

$$\ker(A) \overset{\text{Bem. 5.3.3}}{=} \{x \in K^n \mid \forall a \in \mathrm{row}(A) : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\},$$
$$\mathrm{row}(A) \overset{\text{Kor. 5.3.5}}{=} \{a \in K^n \mid \forall x \in \ker(A) : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}.$$

Analoges gilt natürlich auch für $\ker(B)$ und $\mathrm{row}(B)$.

(a) „$\Longrightarrow$:“ Es gelte $\ker(A) \subseteq \ker(B)$. Wir zeigen, dass $\mathrm{row}(B) \subseteq \mathrm{row}(A)$ gilt. Sei dazu $x \in \mathrm{row}(B)$ gegeben. Nach Korollar 5.3.5 gilt dann $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ für alle $a \in \ker(B)$. Wegen $\ker(A) \subseteq \ker(B)$ gilt dann also $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ insbesondere für alle $x \in \ker(A)$. Wieder nach Korollar 5.3.5 folgt $x \in \mathrm{row}(A)$. Damit ist die Inklusion $\ker(B) \subseteq \ker(A)$ gezeigt.

„$\Longleftarrow$:“ Es gelte $\mathrm{row}(A) \supseteq \mathrm{row}(B)$. Wir zeigen, dass $\ker(A) \subseteq \ker(B)$ gilt. Sei dazu $x \in \ker(A)$ gegeben. Nach Bemerkung 5.3.3 gilt dann $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ für jedes $a \in \mathrm{row}(A)$. Da $\mathrm{row}(B) \subseteq \mathrm{row}(A)$ gilt, folgt insbesondere, dass $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ für jedes $a \in \mathrm{row}(B)$ gilt. Wiederum aus Bemerkung 5.3.3 folgt somit, dass $x \in \ker(B)$ gilt. Damit ist die Inklusion $\ker(A) \subseteq \ker(B)$ nachgewiesen.

(b) „$\Longrightarrow$:“ Es gelte $\ker(A) \subseteq \mathrm{row}(B)$. Wir zeigen, dass $\ker(B) \subseteq \mathrm{row}(A)$ gilt. Sei dazu $x \in \ker(B)$ gegeben. Nach Bemerkung 5.3.3 gilt dann $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ für alle $a \in \mathrm{row}(B)$. Wegen $\ker(A) \subseteq \mathrm{row}(B)$ gilt somit also $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ auch für alle $a \in \ker(A)$. Aus Korollar 5.3.5 folgt nun, dass $x \in \mathrm{row}(A)$ gilt. Damit ist die Inklusion $\mathrm{row}(A) \supseteq \ker(B)$ nachgewiesen.

„$\Longleftarrow$:“ Die Rückrichtung folgt analog zur Hinrichtung, man muss lediglich die Rollen von A und B vertauschen.

(c) „$\Longrightarrow$:“ Es gelte $\mathrm{row}(A) \subseteq \ker(B)$. Wir zeigen, dass $\mathrm{row}(B) \subseteq \ker(A)$ gilt. Sei dazu $x \in \mathrm{row}(B)$ gegeben. Nach Korollar 5.3.5 gilt dann $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ für alle $a \in \ker(B)$. Wegen $\mathrm{row}(A) \subseteq \ker(B)$ gilt somit $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ insbesondere für alle $a \in \mathrm{row}(A)$. Nach Bemerkung 5.3.3 gilt somit $x \in \ker(A)$. Damit ist die Inklusion $\ker(A) \supseteq \mathrm{row}(B)$ nachgewiesen.

„$\Longleftarrow$:“ Die Rückrichtung folgt analog zur Hinrichtung, man muss lediglich die Rollen von A und B vertauschen.

$\square$