Lösungsvorschlag für Aufgabe 1 auf Blatt 9

Vor.: Seien ein Vektorraum V , $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \dots, v_n \in V$ mit $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ gegeben.

Beh.: Die Menge $B := \{v_k \mid k \in \{1, \dots, n\}, v_k \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}\}\}$ ist eine Basis von V .

Beweis. Wir müssen nachweisen, dass B linear unabhängig ist und V erzeugt. Dies tun wir in zwei Schritten.

Nachweis der linearen Unabhängigkeit:

Setze $k := \#B$. Seien weiter $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ mit $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ diejenigen Indizes mit $B = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_k}\}$. Zwecks Widerspruchsbeweis nehmen wir an, B wäre linear abhängig. Nach Proposition 6.2.3 gibt es dann $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_{j_i} = 0$ und $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, k\}$. Seien solche $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ gegeben und sei $\ell \in \{1, \dots, k\}$ größtmöglichst mit $\lambda_\ell \neq 0$. Dann gilt

$$0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_{j_i} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i v_{j_i} = \sum_{i=1}^{\ell-1} \lambda_i v_{j_i} + \lambda_\ell v_{j_\ell}$$
$$\stackrel{\lambda_\ell \neq 0}{\implies} v_{j_\ell} = \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{-\lambda_i}{\lambda_\ell} v_{j_i} \in \text{span}\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{\ell-1}}\} \subseteq \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_{j_{\ell-1}}\}.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $v_{j_\ell} \in B$, wonach ja gerade $v_{j_\ell} \notin \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_{j_{\ell-1}}\}$ gilt. Somit kann B nicht linear abhängig sein, ist also linear unabhängig.

Nachweis, dass V von B erzeugt wird.

Wir zeigen zunächst, dass $v_i \in \text{span } B$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Dies tun wir per „endlicher Induktion“ über $i \in \{1, \dots, n\}$.

Induktionsanfang: ($i = 1$)

Es gibt zwei Möglichkeiten für v_1 :

- 1. Fall: Es gilt $v_1 \neq 0$. In diesem Fall gilt $v_1 \notin \text{span } \emptyset = \{0\}$. Somit gilt $v_1 \in B$ nach Definition von B , also auch $v_1 \in \text{span } B$.
(Beachte hierbei, dass $\{v_1, \dots, v_{i-1}\} = \emptyset$ für $i = 1$ gilt, vgl. Warnung 1.1.6 im Skript.)
- 2. Fall: Es gilt $v_1 = 0$. In diesem Fall gilt $v_1 = 0 \in \text{span } B$, da $\text{span } B \subseteq V$ ein Untervektorraum ist. (Z.B. ist 0 die „leere“ Linearkombination, vgl. Notation 2.1.10.)

Es gilt also in jedem Fall $v_1 \in \text{span } B$. Damit ist der Induktionsanfang nachgewiesen.

Induktionsschritt: ($i \rightsquigarrow i + 1$)

Sei $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gegeben. Wir nehmen an, dass $v_1, \dots, v_i \in \text{span } B$ gelten (*Induktionsvoraussetzung*). Wir zeigen, dass dann auch $v_{i+1} \in \text{span } B$ gilt (*Induktionsbehauptung*). Es gibt zwei Möglichkeiten:

- 1. Fall: Es gilt $v_{i+1} \in B$. Dann gilt natürlich auch $v_{i+1} \in \text{span } B$.
- 2. Fall: Es gilt $v_{i+1} \notin B$. Nach Definition von B gilt dann $v_{i+1} \in \text{span}\{v_1, \dots, v_i\}$. Da nach Induktionsvoraussetzung $v_1, \dots, v_i \in \text{span } B$ gilt und $\text{span } B \subseteq V$ ein Untervektorraum ist, gilt auch $v_{i+1} \in \text{span } B$.

Es gilt also in jedem Fall $v_{i+1} \in \text{span } B$. Damit ist der Induktionsschritt vollzogen.

Nach dem Prinzip der (endlichen) Induktion folgt somit, dass $v_1, \dots, v_n \in \text{span } B$ gelten.

Da $\text{span } B \subseteq V$ ein Untervektorraum ist, gilt damit auch $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \text{span } B$. Nach Voraussetzung gilt aber $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = V$, also gilt $V \subseteq \text{span } B$. Da trivialerweise $\text{span } B \subseteq V$ gilt, folgt $V = \text{span } B$. Also wird V von B erzeugt. $\square$