
Übungsblatt 1 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Gegeben seien folgende Funktionale auf $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}f_1(x_1, \dots, x_4) &= x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \\f_2(x_1, \dots, x_4) &= 2x_2 + x_4 \\f_3(x_1, \dots, x_4) &= -2x_1 - 4x_3 + 3x_4\end{aligned}$$

Bestimme $W \subseteq \mathbb{R}^4$ so, dass $W^0 = \text{span}(\{f_1, f_2, f_3\})$.

Aufgabe 2: Es sei $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^5$ und W der Unterraum von $\mathbb{R}^5$, der von den Vektoren

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \alpha_2 &= \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + \varepsilon_5 \\ \alpha_3 &= \varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4 + \varepsilon_5\end{aligned}$$

aufgespannt wird. Finde eine Basis für W^0 .

Aufgabe 3: Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum mit Unterräumen W_1 und W_2 . Zeige: $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$ und $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

Aufgabe 4: Es seien g, f_1, f_2 lineare Funktionale auf einem endlich-dimensionalen K -Vektorraum V mit Nullräumen N, N_1, N_2 . Zeige: Genau dann ist $g \in \text{span}_K(\{f_1, f_2\})$, wenn $N_1 \cap N_2 \subseteq N$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es seien $g, f_1, \dots, f_r$ lineare Funktionale auf einem endlich-dimensionalen K -Vektorraum V mit Nullräumen $N, N_1, \dots, N_r$. Zeige: Genau dann ist $g \in \text{span}_K(\{f_1, \dots, f_r\})$, wenn $N_1 \cap \dots \cap N_r \subseteq N$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 05. Mai 2014, um 10:00 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.