
Übungsblatt 10 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:

- (a) Bestimme natürliche Zahlen a und b derart, dass $5a \equiv 1 \pmod{17}$ und $7b \equiv 1 \pmod{25}$.
- (b) Bestimme natürliche Zahlen a und b derart, dass $a \equiv 2 \pmod{3}$ und $a \equiv 7 \pmod{14}$ sowie $b \equiv 3 \pmod{4}$, $b \equiv 4 \pmod{5}$ und $b \equiv 6 \pmod{7}$.
- (c) Eine natürliche Zahl a heiße quadratfrei, falls keine natürliche Zahl $b > 1$ existiert mit $b^2 | a$. Zeige: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass keine der Zahlen $\{m, m+1, \dots, m+n\}$ quadratfrei ist.

Aufgabe 2: Es sei $1 < n \in \mathbb{N}$. Eine natürliche Zahl $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ heißt Einheit von $\mathbb{Z}_n$, falls ein $l \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ existiert mit $kl \equiv 1 \pmod{n}$. Es bezeichne $U(n)$ die multiplikative Gruppe der Einheiten von $\mathbb{Z}_n$.

- (a) Zeige: Für $a \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ist $a \in U(n)$ genau dann, wenn $\text{ggT}(a, n) = 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun $\phi(n) := |U(n)|$.
- (b) Zeige: n ist prim genau dann, wenn $\phi(n) = n-1$ und für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(m, n) = 1$ gilt $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.
- (c) Zeige: Ist $n \in \mathbb{N}$, p prim, so ist $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$. Folgere: Sind $p_1, \dots, p_k$ Primzahlen und $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ natürliche Zahlen mit $m = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, so ist $\phi(m) = \prod_{i=1}^k (p_i - 1) \cdot \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i - 1}$.

Aufgabe 3: Zeige: Jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper. (Ein Ring R heißt Integritätsbereich, falls für alle $a, b \in R$ aus $ab = 0$ stets folgt, dass $a = 0$ oder $b = 0$.)

Aufgabe 4: Es sei R ein Ring, ferner $I, J \triangleleft R$ und $I \subseteq J$. Zeige:

- (a) $I \triangleleft J$
(b) $J/I \triangleleft R/I$
(c) $(R/I)/(J/I) \cong R/J$

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $q \in \mathbb{Z}[X]$, $\deg(q) > 0$ so, dass keine natürliche Zahl $t > 1$ existiert mit $t | q(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine natürliche Zahl a heiße q -frei, falls keine natürliche Zahl b existiert mit $q(b) | a$. Zeige: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass keine der Zahlen $\{m, m+1, \dots, m+n\}$ q -frei ist.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 7. Juli 2014, um 10:00 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.