Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2014

Salma Kuhlmann
Merlin Carl

Übungsblatt 11 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:
(a) Bestimme alle Einheiten von $\mathbb{Z}[2i]$.
(b) Zeige: In $\mathbb{Z}[2i]$ sind $2i$ und 2 irreduzibel.
(c) Zeige: $\mathbb{Z}[2i]$ ist nicht faktoriell.
Tipp: In den Teilen (a) und (b) betrachte die Abbildung $x \mapsto x\bar{x}$.

Aufgabe 2:
(a) Zeige: In $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist 3 irreduzibel, aber nicht prim.
(b) Zeige: Das Ideal $\langle 3, 2+\sqrt{-5}\rangle \triangleleft \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist kein Hauptideal.
Tipp: Betrachte auch hier die Abbildung $x \mapsto x\bar{x}$.

Aufgabe 3: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. R heiße lokal, wenn R genau ein maximales Ideal I besitzt.
(a) Zeige: Die Menge $U := \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}$ und b ungerade $\}$ ist ein lokaler Unterring von $\mathbb{Q}$, dessen maximales Ideal von 2 erzeugt wird.
(b) Sei R lokaler Ring, I das maximale Ideal von R, ferner $x \in R \setminus I$. Zeige: x ist Einheit.
(c) Es bezeichne R^* die Menge der Einheiten von R. Zeige: R ist genau dann lokal, wenn $R \setminus R^*$ ein Ideal ist.

Aufgabe 4: Es sei R ein Integritätsbereich und S eine multiplikative Untermenge von R.
(a) Zeige: Die Abbildung $i : R \to S^{-1}R$, definiert durch $i(r) = r/1$, ist eine Einbettung von Ringen.
Wir identifizieren nun R mit dem Bild von R unter i. Sei $IS^{-1}R$ das von $I \triangleleft R$ in $S^{-1}R$ erzeugte Ideal.
(b) Zeige: Jedes Ideal von $S^{-1}R$ ist von der Form $IS^{-1}R$ für ein Ideal $I \triangleleft R$.
Tipp: Sei $J \triangleleft S^{-1}R$. Zeige zunächst, dass $J \cap R \triangleleft R$ und weiter, dass $(J \cap R)S^{-1}R = J$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $q \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit führendem Koeffizienten 1. Zeige: Alle rationalen Nullstellen von q sind ganzzahlig.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 14. Juli 2014, um 10:00 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.