Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2014

Salma Kuhlmann
Merlin Carl

Übungsblatt 12 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:
(a) Es sei $\mathfrak{F}$ eine Familie von Mengen. Zeige, dass $\subseteq$ eine partielle Ordnung auf $\mathfrak{F}$ ist.
(b) Welche der folgenden Relationen sind auf den angegebenen Mengen partielle Ordnungen? Welche davon sind total? Welche sind wohlfundiert? In welchen hat jede Kette eine obere Schranke? Beweise deine Antworten.
(1) $a|b$ (also die Teilbarkeitsrelation) auf $\mathbb{N}^{\geq 1}$.
(2) $\subseteq$ auf $\mathfrak{P}(X)$, wobei X eine unendliche Menge.
(3) $\leq^*$ auf $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, wobei $f \leq^* g$, falls $f(n) \leq g(n)$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.
(4) $\subseteq$ auf der Menge $\mathfrak{M} := \{X \subseteq V | \text{span}(X) = X\}$, wobei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) > 1$ ist.
(5) $\subseteq$ auf der Menge $\mathfrak{M} := \{X \subseteq V | \text{span}(X) = X\}$, wobei V ein unendlich-dimensionaler Vektorraum ist.

Aufgabe 2:
(a) Zeige direkt (also ohne die Verwendung der Äquivalenz von AC und AC'), dass Zorns Lemma AC' impliziert.
(b) Es sei V ein Vektorraum, $A \subseteq V$ linear unabhängig. Zeige: Es existiert eine Basis $\mathfrak{B}$ von V mit $A \subseteq \mathfrak{B}$.

Aufgabe 3: Eine Familie $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ von Mengen hat 'endlichen Charakter', falls für jede Menge X gilt: $X \in \mathfrak{F}$ genau dann, wenn $Y \in \mathfrak{F}$ für jedes endliche $Y \subseteq X$. Das Lemma von Tukey (TL) besagt: Hat eine Familie $\mathfrak{F}$ endlichen Charakter, so enthält $\mathfrak{F}$ ein $\subseteq$-maximales Element. Zeige:
(a) AC impliziert TL.
(b) TL impliziert AC.
Tipp: Arbeite ggf. mit einer geeigneten zu AC äquivalenten Aussage.

Aufgabe 4: Es seien A und B Wohlordnungen.
(a) Zeige: $A + B$ und $A \cdot B$ sind Wohlordnungen.
(b) Zeige: Ist $f : A \to A$ ordnungserhaltend, so gilt $f(a) \geq a$ für alle $a \in A$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: In dieser Aufgabe wollen wir Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten, die $\forall x, y \in \mathbb{R} f(x + y) = f(x) + f(y)$ erfüllen. Eine solche Funktion nennen wir 'additiv'.
(a) Zeige: Ist f additiv, $q \in \mathbb{Q}$, so ist $f(qx) = qf(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Es sei nun $\mathbb{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.
(b) Zeige: Ist $g : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, so existiert eine additive Funktion f mit $f(b) = g(b)$ für alle $b \in \mathbb{B}$.
(c) Folgere: Es existiert eine additive Funktion f, die weder linear noch stetig ist.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 21. Juli 2014, um 10:00 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.