
Übungsblatt 2 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Sei K ein Körper, $a, b \in K$ und f ein lineares Funktional auf K^2 gegeben durch $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. Zu jedem der folgenden linearen Operatoren T sei $g = T^t f$. Bestimme $g(x_1, x_2)$.

- a) $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$
- b) $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$
- c) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

Aufgabe 2: Es sei K ein Körper.

- (a) Es sei $V = K[X]$, $T : V \rightarrow V$ ordne jedem $p \in V$ seine Ableitung p' zu. Ferner sei $g : V \rightarrow K$ gegeben durch $g(p) = p(0)$. Bestimme $T^t(g)(4x^2 + 3x + 5)$.
- (b) Für $n \in \mathbb{N}$, $V = K^{n \times n}$, $M \in V$ sei $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n M_{ii}$. Ferner bilde $T : V \rightarrow V$ die Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ab auf die Matrix $T(A) = (a_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$. Zeige: Für alle M ist $T^t(\text{tr})(M) = \text{tr}(M)$.
- (c) Es sei F die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, $T : F \rightarrow F$ gegeben durch $T(f) = f'$, ferner $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g(f) = \int_0^1 f(x) dx$. Bestimme $T^t(g)(f)$.

Aufgabe 3:

- (a) Sei $\mathfrak{B} := ((1, 0, 1), (-1, -1, -1), (3, 3, 0)) \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeige, dass $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und bestimme die Dualbasis $\mathfrak{B}^*$ zu $\mathfrak{B}$.
- (b) Es seien $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch:
 $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2$. Zeige:
 $\mathbb{B} := (f_1, f_2, f_3)$ ist eine Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$.
- (c) Finde eine Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathbb{R}^3$ so, dass $\mathfrak{B}^* = \mathbb{B}$ (mit $\mathbb{B}$ wie in (b)).

Aufgabe 4: Es sei S eine Menge, K ein Körper; ferner bezeichne $V(S; K)$ den K -Vektorraum der Funktionen $f : S \rightarrow K$ mit $(cf + g)(x) = cf(x) + g(x)$ für alle $f, g \in V(S; K)$, $c \in K$, $x \in S$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und W ein n -dimensionaler Unterraum von $V(S; K)$. Zeige: Es existieren $x_1, \dots, x_n \in S$, $f_1, \dots, f_n \in W$ mit $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\text{char}(K)$ kein Teiler von n ist. Zeige: Sind $A, B \in K^{n \times n}$, so ist $AB - BA \neq I_n$.

Zeige weiter: Ist n gerade und $\text{char}(K) = 2$, so existieren $A, B \in K^{n \times n}$ mit $AB - BA = I_n$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 12. Mai 2014, um 10:00 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.