Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2014

Salma Kuhlmann
Merlin Carl

Übungsblatt 3 zur Linearen Algebra II

In allen Aufgaben sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, V ein K-Vektorraum, $(|)$ ein inneres Produkt auf V und ρ wie im Rieszschen Darstellungssatz.

Aufgabe 1: Sei V endlich-dimensional.
(a) Zeige: $(f_1|f_2) := (\rho(f_2)|\rho(f_1))$ ist ein inneres Produkt auf V^*.
(b) Finde ein Beispiel für V und $(|)$ so, dass $(f_1|f_2) := (\rho(f_1)|\rho(f_2))$ kein inneres Produkt auf V^* ist.

Aufgabe 2: Sei V endlich-dimensional. Zeige: Für alle $g \in V^*$ ist $\rho(T^t(g)) = T^*(\rho(g))$.

Aufgabe 3: Es sei V endlich-dimensional und $T : V \to V$ linear.
(a) Zeige: Es gibt eine eindeutig bestimmte lineare Funktion $T^* : V \to V$ mit $(T(x)|y) = (x|T^*(y))$ für alle $x, y \in V$.
(b) Zeige: Für jedes lineare $T : V \to V$ ist $(T^*)^* = T$.
(c) Zeige: Ist $c \in K$, so ist $(cT)^* = \bar{c}T^*$

Aufgabe 4: Es sei $T : V \to V$ linear, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{B} := (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ eine Orthonormalbasis für V, A die Matrixdarstellung von T bezüglich $\mathfrak{B}$ und A^* die Matrixdarstellung von T^* bezüglich $\mathfrak{B}$.
(a) Zeige: Für $1 \leq i, j \leq n$ ist $A_{ij} = (T\alpha_j|\alpha_i)$
(b) Zeige: Für $1 \leq i, j \leq n$ ist $A^*_{ij} = \overline{A_{ji}}$
(c) Zeige: $c \in K$ ist genau dann Eigenwert von A, wenn $\bar{c}$ Eigenwert von A^* ist.
(d) Zeige: $\overline{\det(A)} = \det(A^*)$

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $V = \mathbb{C}[x]$ der Vektorraum der Polynome mit komplexen Koeffizienten.
(a) Zeige: $(p|q) := \int_0^1 p(t)\overline{q(t)}dt$ definiert ein inneres Produkt auf V
(b) Zeige: Ist $p = \Sigma_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, $q = \Sigma_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, so ist $(p|q) = \Sigma_{j,k\in\mathbb{N}} \frac{a_j \overline{b_k}}{j+k+1}$
Es sei nun $c \in K$ fest. Dann ist durch $L(p) = p(c)$ offenbar ein lineares Funktional auf V definiert. Angenommen, $p_0 \in V$ wäre so, dass $(q|p_0) = L(q)$ für alle $q \in V$, also $q(c) = \int_0^1 q(t)\overline{p_0(t)}dt$ für alle $z \in V$. Außerdem sei h das lineare Polynom $x - c$.
(c) Zeige: Für alle $f \in V$ ist $\int_0^1 h(t)f(t)\overline{p_0(t)}dt = 0$
(d) Zeige nun, dass $hp_0 = 0$, also $p_0 = 0$ und damit $L = 0$, ein Widerspruch. Folgere, dass ein p_0 mit den oben genannten Eigenschaften nicht existiert und die Endlichdimensionalität in der Voraussetzung des Rieszschen Darstellungssatzes also nicht fortgelassen werden kann.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 19. Mai 2014, um 10:00 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.