Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2014

Salma Kuhlmann
Merlin Carl

Übungsblatt 4 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $(|)$ ein inneres Produkt auf V und ρ wie im Rieszschen Darstellungssatz.
(a) Zeige: Ist $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ eine Basis von V, so existiert eine Basis $\mathfrak{B}' = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ von V derart, dass $(\alpha_i|\beta_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.
(b) Zeige: Die Basis $\mathfrak{B}'$ in (a) ist eindeutig; ferner ist $\mathfrak{B}$ genau dann orthonormal, wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$.
(c) Zeige: Ist $W \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist $\rho(W^0) = W^\perp$.

Aufgabe 2: Es sei K ein beliebiger Körper und V ein K-Vektorraum, $T : V \to V$ linear.
(a) Zeige: Ist $U : V \to V$ linear und $UT = TU$, so sind $\mathrm{im}(U)$ und $\ker(U)$ T-invariante Unterräume von V.
(b) Zeige: Ist $W \subseteq V$ ein T-invarianter Unterraum von V, $g \in K[x]$, so ist W $g(T)$-invariant.
(c) Zeige: Ist $g \in K[x]$, so ist $g(T)T = Tg(T)$.

Aufgabe 3: Es sei $K = \mathbb{C}$, V ein K-Vektorraum und T ein hermitescher Operator auf V. Zeige: $T = 0$ gdw. $(Tx|x) = 0$ für alle $x \in V$.

Aufgabe 4:Es sei V hermitesch, T auf V normal. Zeige: Es existiert $p \in \mathbb{C}[x]$ mit $T^* = p(T)$.
(Tipp: Zeige zunächst: Ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in K$ paarweise verschieden und $y_1, ..., y_n \in K$ beliebig, so existiert $p \in K[x]$ mit $p(x_i) = y_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.)

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $V = \mathbb{C}[x]$ der Vektorraum der Polynome mit komplexen Koeffizienten. In der letzten Zusatzaufgabe wurde gezeigt, dass $(p|q) := \int_0^1 p(t)\overline{q(t)}dt$ ein inneres Produkt auf V definiert. Es sei nun D der Ableitungsoperator auf V. Wir nehmen nun an, dass es eine zu D adjungierte Abbildung D^* gibt.
(a) Zeige: Für alle $p, q \in V$ ist $(Dp|q) = p(1)q(1) - p(0)q(0) - (p|Dq)$ und $(p|D^*q + Dq) = p(1)q(1) - p(0)q(0)$
Fixieren wir q, so ist $L(p) := p(1)q(1) - p(0)q(0)$ offenbar ein lineares Funktional.
(b) Zeige: Ist $L \neq 0$, so existiert kein $h \in V$ mit $L(p) = (p|h)$ für alle $p \in V$. (Tipp: Zusatzaufgabe von Zettel 3)
(c) Zeige: Ist $h = D^*q + Dq$, so ist $L(p) = (p|h)$ für alle $p \in V$; folgere, dass $q(0) = q(1) = 0$.
(d) Es sei nun $q \in V$ so, dass $q(0) \neq 0$. Zeige, dass dann D^*q nicht definiert ist und die Endlichdimensionalität in der Voraussetzung der Existenz von Adjungierten also nicht fortgelassen werden kann.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 26. Mai 2014, um 10:00 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.