Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2014

Salma Kuhlmann
Merlin Carl

# Übungsblatt 6 zur Linearen Algebra II

**Aufgabe 1**: Es sei $K$ ein Körper.
(a) Sei $K$ endlich mit mindestens $n$ Elementen, ferner $p \in K[X]$ mit $p \neq 0$, $\deg(p) < n$. Zeige: Es existiert $x \in K$ mit $p(x) \neq 0$.
(b) Zeige: Für $p, q \in K[X]$ mit $p + q \neq 0$ ist $\deg(p+q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$; ist weiter $\deg(p) < \deg(q)$, so ist $\deg(p+q) = \deg(q)$.
(c) Es sei nun $S \subseteq K[X]$ so, dass $\deg : S \to \mathbb{N}_0$ injektiv ist. Zeige: $\text{span}_K(S) = K[X]$ gilt genau dann, wenn $\deg : S \to \mathbb{N}_0$ auch surjektiv ist.

**Aufgabe 2**:
(a) Finde ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ mit $p(0) = i$, $p(i) = 42$ und $p(42) = 0$.
(b) Es sei nun $K$ ein Körper, ferner $x_1, ..., x_n \in K$ paarweise verschieden. Definiere Polynome $p_1, ..., p_n \in K[X]$ durch $p_i(x) = \Pi_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$. Zeige: Für alle $1 \leq i, j \leq n$ ist $p_i(x_j) = \delta_{ij}$.
(c) Es sei $K$ ein unendlicher Körper, $K^{\leq n}[X]$ der $K$-Vektorraum der Polynome in $K[X]$ mit Grad $\leq n$, ferner $x_1, ..., x_{n+1} \in K$ paarweise verschieden. Definiere eine Abbildung $f : K^{\leq n}[X] \to K^{n+1}$ durch $f(p) = (p(x_1), ..., p(x_{n+1}))$. Zeige: $f$ ist ein Isomorphismus.

**Aufgabe 3**: Es sei $K$ ein Körper, $K[[X]]$ der Ring der Potenzreihen über $K$.
(a) Sei $x := (0, 1, 0, ...) \in K[[X]]$. Bestimme $x^i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.
(b) Zeige: $\{X^i | i \in \mathbb{N}\}$ ist (als Teilmenge von $K[X]$) linear unabhängig. Folgere: $K[X]$ und $K[[X]]$ sind (als Vektorräume über $K$) unendlichdimensional.
(c) Es seien $x, y, z \in K[[X]]$, $c \in K$. Zeige: $x(y + z) = xy + xz$ und $c(xy) = (cx)y$.

**Aufgabe 4**: Es sei $K$ ein endlicher Körper.
(a) Zeige: Ist $x \in K$, so existiert eine natürliche Zahl $n > 1$ mit $x^n = x$.
(b) Zeige: Es existiert eine natürliche Zahl $n > 1$ so, dass $x^n = x$ für alle $x \in K$. Folgere, dass die Abbildung von Polynomen auf Polynomfunktionen über endlichen Körpern nicht injektiv ist.

**Zusatzaufgabe für Interessierte**: Es sei $K$ ein Körper. Zu jedem $p \in K[X]$ definiere eine Abbildung $\phi_p : K[X] \to K[X]$ durch $\phi_p(q) = q(p)$.
(a) Zeige: Für $\deg(p) > 0$ ist $\phi_p$ linear und injektiv.
(b) Bestimme alle $p$ so, dass $\phi_p$ ein Isomorphismus ist.
(c) Definiere nun $\psi_p$ durch $\psi_p(q) = p(q)$. Finde alle $p \in K[X]$ so, dass $\psi_p$ linear ist.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 09. Juni 2014, um 10:00 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.