Übungsblatt 7 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Es sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $T : V \rightarrow V$ linear, ferner χ_T das charakteristische Polynom und μ_T das Minimalpolynom von T . Wir wollen zeigen, dass χ_T und μ_T in K die gleichen Nullstellen haben.

(a) Es sei $c \in K$ ein Eigenwert von T . Zeige: $\chi_T(c) = \mu_T(c) = 0$

Nun sei $z \in K$ eine Nullstelle von μ_T und $\mu_T = (X - z)q$.

(b) Zeige: Es existiert $v \in V$ mit $(q(T))(v) \neq 0$.

(c) Zeige: Es existiert $0 \neq v \in V$ mit $Tv = zv$; folgere, dass die Nullstellen von μ_T gerade die Eigenwerte von T sind und also mit den Nullstellen von χ_T zusammenfallen.

Aufgabe 2: Es seien $K \subseteq K'$ Körper, $A \in K^{n \times n}$. Ein normiertes Polynom $p \in K'[X]$ heißt minimal für A bezüglich K' , falls $p(A) = 0$ und $q(A) \neq 0$ für jedes $q \in K'[X]$ mit $\deg(q) < \deg(p)$.

(a) Zeige: Es existiert genau ein für A bezüglich K' minimales Polynom.

Dieses Polynom bezeichnen wir ab jetzt als Minimalpolynom von A bezüglich K' , abgekürzt $\mu_A^{K'}$. Wir wollen nun zeigen, dass $\mu_A^{K'} = \mu_A^K$, das Minimalpolynom von A also über jedem Grundkörper das gleiche ist.

(b) Zeige: Genau dann existiert $p \in K'[X]$ mit $p(A) = 0$ und $\deg(p) = k$, wenn das lineare Gleichungssystem $A^k + x_{k-1}A^{k-1} + \dots + x_0A^0 = 0$ mit Koeffizienten in K , n^2 Gleichungen und k Variablen $x_0, \dots, x_{k-1}$ über K' lösbar ist.

(c) Zeige: Ist $\mathcal{L}$ ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten in K , so ist $\mathcal{L}$ genau dann über K lösbar, wenn $\mathcal{L}$ über K' lösbar ist.

(d) Zeige: $\deg(\mu_T^{K'}) = \deg(\mu_T^K)$. Folgere, dass $\mu_T^{K'} = \mu_T^K$.

Aufgabe 3: Es sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $T : V \rightarrow V$ linear sowie $U_1, U_2 \subseteq V$ T -invariante Unterräume mit $U_1 + U_2 = V$. Für $i \in \{1, 2\}$ sei μ_i das Minimalpolynom von $T|_{U_i} : U_i \rightarrow U_i$. Ferner sei μ das Minimalpolynom von T . Zeige: $\mu = \text{kgV}(\mu_1, \mu_2)$.

Aufgabe 4:

(a) Berechne das Minimalpolynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom $(x - 1)(x - 2)(x - 3)^2(x - 4)^2$. Finde alle möglichen Minimalpolynome von A .

Zusatzaufgabe für Interessierte:

Es sei p eine Primzahl. Eine rationale Funktion über $\mathbb{F}_p$ ist ein Quotient $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{F}_p[X]$ und $q \neq 0$. Sind $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ rationale Funktionen über $\mathbb{F}_p$, so definieren wir $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$ und $\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}$. Es bezeichne Rat_p die Menge der rationalen Funktionen über $\mathbb{F}_p$.

Zeige: $(\text{Rat}_p, +, \cdot)$ ist ein unendlicher Körper mit Charakteristik p .

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 16. Juni 2014, um 10:00 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.